

第 5 题 2026 · 问题 I 两根弹簧与相平面

对应官方问题册：第 2–3 页（PDF 页码）。请与原题对照阅读。

两根弹簧共同产生一个线性回复力，平衡位置一般不在两墙中点。先把总势能配方，之后的转折点、速度最大处以及位置—速度图都可以从同一式读出。以下记 $D = L - \ell$ 、 $K = k_L + k_R$ ，并用 x_c 表示平衡位置。

问 1 伸长与压缩时的平衡位置

解答

左、右弹簧的长度分别为 $L + x$ 与 $L - x$ 。以向右为正，左弹簧的力为 $-k_L(D + x)$ ，右弹簧的力为 $k_R(D - x)$ 。合力为

$$F = -k_L(D + x) + k_R(D - x) = (k_R - k_L)D - Kx.$$

令 $F = 0$,

$$x_c = \frac{k_R - k_L}{k_L + k_R}(L - \ell).$$

因此 $L = \ell$ 时 $x_c = 0$ ； $L > \ell$ 和 $L < \ell$ 时均使用同一表达式。

答 (ア) $x = 0$ ；(イ)、(ウ) $x = \frac{k_R - k_L}{k_L + k_R}(L - \ell)$ 。后两种情况下 $L - \ell$ 的符号相反。

解说

压缩不需要另换胡克定律 用带符号的伸长量 $D \pm x$ ，负值自然表示压缩。左、右弹簧的力方向已经由前面的正负号确定，不应在压缩时再多反转一次符号。

较硬弹簧的影响 若 $k_R > k_L$ ，拉伸状态 $D > 0$ 时平衡点偏右；压缩状态 $D < 0$ 时偏左，因为更硬的右弹簧向左推得更强。

对称检查 $k_R = k_L$ 时 $x_c = 0$ ，无论两弹簧同时伸长还是压缩，平衡点均在中点。交换左右两侧的弹簧常数，则 x_c 变号，符合左右镜像。

问 2 两根弹簧各自的势能

解答

弹性势能由相对于自然长的形变量平方决定。左弹簧形变量为 $L + x - \ell = D + x$ ，右弹簧形变量为 $L - x - \ell = D - x$ ，所以

$$U_L = \frac{1}{2}k_L(D + x)^2, \quad U_R = \frac{1}{2}k_R(D - x)^2.$$

答 $U_L = \frac{1}{2}k_L(L + x - \ell)^2$, $U_R = \frac{1}{2}k_R(L - x - \ell)^2$ 。

解说

势能与力的符号不同 形变量为负时表示压缩，弹性势能仍为正。力要区分方向，势能是标量，用平方处理，不能在压缩时人为加负号。

分别求导可以核对方向

$$-\frac{dU_L}{dx} = -k_L(D+x), \quad -\frac{dU_R}{dx} = +k_R(D-x).$$

右弹簧的正号来自 $(D-x)$ 对 x 求导得到 -1 ，与问1一致。

零势能的位置 左弹簧在 $x = -D$ 处自然长， $U_L = 0$ ；右弹簧在 $x = D$ 处自然长， $U_R = 0$ 。除 $D = 0$ 外，两者不能同时处在各自零势能的位置。

问3 总势能最低的位置**解答**

总势能展开为

$$U = U_L + U_R = \frac{1}{2}Kx^2 + (k_L - k_R)Dx + \frac{1}{2}KD^2.$$

配方得到

$$U = \frac{1}{2}K(x - x_c)^2 + U_{\min}, \quad U_{\min} = \frac{2k_Lk_R}{K}D^2.$$

$K > 0$ ，故平方项在 $x = x_c$ 时唯一取零。

答 $x = \frac{k_R - k_L}{k_L + k_R}(L - \ell)$ 。

解说

力平衡与能量最低相互对应 由 $F = -dU/dx = -K(x - x_c)$ 可见，势能最低点正是合力为零的位置。由于二次项系数为正，这个平衡是稳定平衡。

最低势能一般不为零 当 $L \neq \ell$ 时，两根弹簧不能同时为自然长，所以 $U_{\min} > 0$ 。这个常数不影响运动，但计算绝对储能时不能随意漏掉。

之后可以使用的等效形式 以 $y = x - x_c$ 为坐标，运动方程变为 $m\ddot{y} = -Ky$ ，角频率为 $\omega = \sqrt{K/m}$ 。两弹簧不是简单“抵消”，它们对位移的回复系数相加。

问4 转折点与通过原点的速度**解答**

现在 $D > 0$ 且 $k_R > k_L$ 。释放时左弹簧自然长，故 $x(0) = -D$ 、 $v(0) = 0$ 。振幅为

$$A = x_c + D = \frac{2k_R}{K}D.$$

所以最小位置为 $x_{\min} = -D$ ，最大位置为

$$x_{\max} = x_c + A = 2x_c + D = \frac{3k_R - k_L}{K}D.$$

释放时总势能为 $2k_R D^2$ ；原点处总势能为 $K D^2/2$ 。由能量守恒，

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2k_R D^2 - \frac{1}{2}K D^2 = \frac{1}{2}(3k_R - k_L)D^2.$$

答 $x_{\min} = -(L - \ell)$, $x_{\max} = \frac{3k_R - k_L}{k_L + k_R}(L - \ell)$, $v = \pm(L - \ell)\sqrt{\frac{3k_R - k_L}{m}}$ 。第一次通过原点取正号，返回时取负号。

解说

转折点关于平衡点对称 $x_{\min} + x_{\max} = 2x_c$ ，不是0。若把两侧最大位移直接写成 $\pm D$ ，就错误地把原点当成了振动中心。

“速度”保留方向 原点在两个转折点之间，每周期经过两次。速率只有一个大小，但速度有正、负两个值；首次从左端释放后向右，故先取正号。

题设的运动范围 本题已假定不撞墙，所求转折点应在允许区域内。若为任意参数另建实际装置，还需检查 $x_{\max} < L$ ，不能忽略墙的位置。

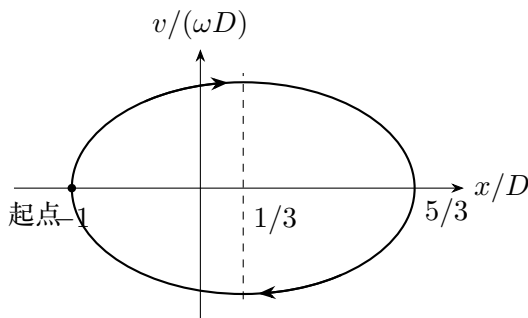
问5 单次释放的相轨迹与运动方向

解答

用 $\omega = \sqrt{K/m}$ 、 $A = 2k_R D/K$ ，由能量守恒得

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(x - x_c)^2 = \frac{1}{2}KA^2, \quad \frac{(x - x_c)^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1.$$

这是以 $(x_c, 0)$ 为中心的椭圆。初始点 $(-D, 0)$ 在左端，开始时加速度向右、速度变正，所以先沿上半椭圆向右，再沿下半椭圆向左，按顺时针绕行。



绘图例取 $k_R = 2k_L$ ；纵、横坐标分别按 ωD 、 D 归一化。

答 相轨迹为上述椭圆，起点在左端，沿顺时针运动； $x = x_c = \frac{k_R - k_L}{k_L + k_R}(L - \ell)$ 时速率最大。

解说

速率最大不在一般的原点 $v^2 = \omega^2[A^2 - (x - x_c)^2]$ 在 $x = x_c$ 处最大，此处势能最低。

图上的上下半部 上半部 $v > 0$ 意味着 x 增加，下半部 $v < 0$ 意味着 x 减小。箭头来自实际速度的符号，不是随意指定的绕行方向。

椭圆不是空间中的运动轨道 物体实际只沿一条直线往返；纵轴画的是速度，而不是另一个空间坐标。

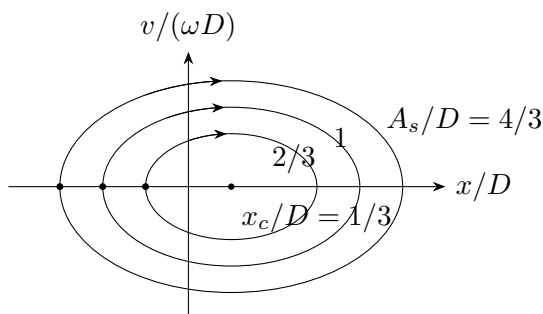
问6 改变释放位置后的相轨迹族

解答

设静止释放位置为 x_s ，则新的振幅为 $A_s = |x_s - x_c|$ 。每条轨迹满足

$$(x - x_c)^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A_s^2.$$

改变 x_s 只改变右侧的常数，不改变共同中心 $(x_c, 0)$ 或纵横半轴之比 ω 。下图给出三个不同的振幅，均从左端静止释放。



仍取 $k_R = 2k_L$ 。三个黑点表示不同的静止释放位置。

答 得到同心、相似的椭圆族；振幅为 $|x_s - x_c|$ 。若 $x_s = x_c$ ，轨迹退化为中心的一个静止点。

解说

不同释放点可能对应同一条椭圆 x_c 左右等距离的两个释放点有相同振幅与能量，只是从同一椭圆的不同端点出发。因此画“两条以上不同轨迹”时，需要选择不同的 $|x_s - x_c|$ 。

频率与振幅 每条椭圆纵半轴为 ωA_s 、横半轴为 A_s ，比值不变。这表现了理想线性弹簧的频率不依赖振幅。

与上一年度的区别 本题没有摩擦，轨迹是闭合曲线，不会逐圈收缩。2025 年度的干摩擦问题不能照用这组恒能量椭圆。

问7 相轨迹对应的守恒量

解答

总机械能为动能与两根弹簧的势能之和：

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_L(D+x)^2 + \frac{1}{2}k_R(D-x)^2.$$

利用问3的配方形式，

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(x - x_c)^2 + U_{\min}.$$

沿每条相轨迹， A_s 为常数，因此

$$E = \frac{1}{2}KA_s^2 + U_{\min}$$

也为常数。故这些曲线是总机械能的等值线。

答 守恒量为总机械能： $E = \frac{1}{2}mv^2 + U_L + U_R$ 。

解说

不是动能或势能各自守恒 到转折点时 $v = 0$ ，动能为零；经过平衡点时动能最大。两种能量彼此转换，总和才不变。

轨迹离中心越远能量越高 $E - U_{\min} = KA_s^2/2$ 随振幅平方增加。图中嵌套椭圆从内到外对应越来越高的机械能。

最低能量态 中心点 $(x_c, 0)$ 具有 $E = U_{\min}$ 。即使这个值不为零，物体仍可静止，因为势能的绝对零点不决定合力，势能梯度才决定合力。

用运动方程检查

$$\frac{dE}{dt} = mv\dot{v} + K(x - x_c)\dot{x} = v[m\dot{v} + K(x - x_c)] = 0.$$

无摩擦且墙不动，确实没有外界持续向系统输入或带走机械能。

第 6 题 2026 · 问题 II 螺线管、感应环与电子轨道

对应官方问题册：第 4–7 页（PDF 页码）。请与原题对照阅读。

前半部分要把导线电阻、单位长度匝数和磁场分别比较；后半部分把电子速度分成平行、垂直于磁场的分量。判断是否撞壁时，回旋半径不等于电子离螺线管轴的最大距离，这是本题的关键几何区别。

问 1 只给半段螺线管通电

解答

设整段绕线电阻为 R 。原来全长接入电源，故 $I_0 = V_0/R$ 。闭合开关后，B 与 C 同电位；充分时间后 BC 段不再有电流，电源只给 AB 半段供电。均匀绕线的半段电阻为 $R/2$ ，所以

$$I_{\text{new}} = \frac{V_0}{R/2} = 2I_0.$$

AB 段的单位长度匝数没有改变，P 位于其内部。在题设的长螺线管近似下 $H = nI$ ，因此

$$H_{\text{new}} = n(2I_0) = 2H_0.$$

答 电池电流为 $2I_0$ ，P 点磁场强度为 $2H_0$ ，均为原来的 2 倍。

解说

先区分电路的长度与磁场的长度 通电的导线长度减半使电阻减半，但单位长度匝数不变。不能把总匝数减半直接当成磁场减半，因为磁场用的是匝数密度。

充分时间后的条件 BC 段在切换过程中可能有感应电流，但其导线有电阻，稳态时该电流消失。本问不是要求开关刚闭合的一瞬。

长螺线管近似 使用 $H = nI$ ，忽略远端边缘效应。P 在 AB 段内部，不能套用开口端面磁场约为内部一半的关系。

问 2 拉长线圈后的电流与磁场

解答

将整个线圈的轴向长度变为原来的 2 倍，而总匝数不变。这里改变的是绕线的疏密，不是把铜导线本身拉细；各半段仍由原来的同一段导线构成，其电阻保持 $R/2$ 。开关闭合，所以

$$I_{\text{new}} = 2I_0.$$

单位长度匝数变为 $n/2$ ，故 P 点磁场为

$$H_{\text{new}} = \frac{n}{2}(2I_0) = H_0.$$

答 电池电流为原来的 2 倍，P 点磁场强度为原来的 1 倍。

解说

线圈长不等于导线长 螺线管的轴向长度由匝距决定；电阻则由铜导线的实际长度与截面积决定。本题把匝距拉大、总匝数保持不变，不能直接把电阻也乘 2。

比较基准 答案中的倍数是相对于最初 I_0, H_0 ，不是相对于问 1 已经变成 $2I_0, 2H_0$ 的状态。与问 1 相比，电流不变、磁场减半；与最初相比，则为 2 倍和 1 倍。

模型的边界 若另行把金属丝塑性拉长、改变截面，电阻就会变化；题目没有给这样的材料变形条件。本解使用通常的线圈匝距改变模型。

问 3 两个铜环中的感应电流**解答**

开关刚闭合后的电流上升阶段，螺线管产生的轴向磁通增加。位于左端的 R_1 和位于中央的 R_2 都被这个变化的磁通穿过，所以两环中都会产生感应电流。按楞次定律，环中电流产生的磁场必须反抗原磁通的增加，因此两环电流的绕行方向均与螺线管绕线电流的方向相反。

答 R_1 、 R_2 均有感应电流，方向均与螺线管电流的绕行方向相反。

解说

从同一端观察再比较方向 “相同”或“相反”指从同一个轴向观察时的顺、逆时针绕行方向，不是比较图上某一小段导线的上下方向。

端部也有磁通 左端的磁场并不为零，且在通电过程中也会变化，因此 R_1 同样感应。中央与端部磁场大小不同，不改变两处磁通都在增加这一事实。

何时感应电流消失 充分时间后螺线管电流恒定，磁通不再增加，铜环的感应电流逐渐衰减为零。不能把“通电”本身等同于“始终有感应电流”。

下一问还需要空间信息 本问只确定环电流方向。是否受到沿轴的净力，还取决于磁场沿位置的变化，不是只看“电流相反”这一个条件。

问 4 端部环与中央环的运动**解答**

R_1 位于左端。通电时其感应电流与螺线管电流反向，环产生的磁矩与局部轴向磁场相反。左端附近的磁场向螺线管内部（右侧）增强，反向磁矩受到指向较弱磁场一侧的力，故 R_1 向左运动。 R_2 位于中央，左右两侧的轴向作用对称，其合力为零，故不开始平移。

答 R_1 向左运动； R_2 不运动。 R_2 仍可有感应电流，但轴向净力为零。

解说

电流存在与净力存在不同 环中有电流是磁通随时间变化的结果；轴向净力则与磁场的空间梯度有关。在中央，时间变化可以非零，而轴向梯度由于对称性为零。

楞次定律的能量解释 R_1 向外离开强场区域，会减小穿过它的磁通，方向上抵抗通电时磁通的增加。它并不是被吸向磁场最强处，而是因感应电流的反向磁矩受到排斥。

可用的定性表达式 把小环看成轴向磁偶极子时，可写 $F_x \propto \mathbf{m}_x \partial B_x / \partial x$ 。 $\mathbf{m}_x$ 与 B_x 反向，左端梯度向右，因而受力向左；中央梯度为零。

题设中的对称条件 这里使用环不旋转、位于共同轴线上、忽略两环相互作用等条件。若中央环偏离中心或倾斜，就不能仅凭这段对称性直接断言合力为零。

问 5 洛伦兹力的两个分量

解答

电子速度分解为

$$v_{\parallel} = v \cos \theta, \quad v_{\perp} = v \sin \theta.$$

磁场沿 x 轴， $\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 始终垂直于磁场。因此 x 方向的力为零，垂直分量的大小为

$$F_{\perp} = eBv_{\perp} = e\mu_0 NI v \sin \theta.$$

答 $F_x = 0$, $F_{\perp} = e\mu_0 NI v \sin \theta$ 。

解说

负电荷影响转向，不影响力的大小 电子带 $-e$ ，其受力方向与正电荷相反；题目要求分量的大小，所以大小公式使用 $e > 0$ 。

平行运动保持匀速 $F_x = 0$ 意味着 $v_{\parallel} = v \cos \theta$ 恒定。垂直部分则受到向心力，形成圆周运动，两部分合起来构成螺旋运动。

磁场不改变总速率 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ ，磁场不做功。垂直分量的方向改变，但其大小 $v \sin \theta$ 不变，总速率也保持 v 。

轴向射出的特例 $\theta = 0$ 时 $v_{\perp} = 0$ ，洛伦兹力为零，电子一直沿 x 轴直线运动，不形成具有非零半径的螺旋。

问 6 不撞内壁的电流条件

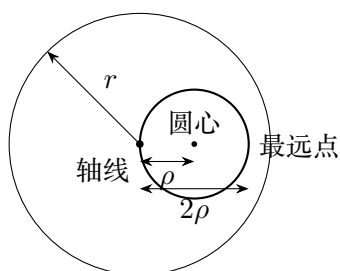
解答

设电子垂直投影的回旋半径为 ρ 。由向心力关系，

$$\frac{mv_{\perp}^2}{\rho} = eBv_{\perp}, \quad \rho = \frac{mv \sin \theta}{e\mu_0 NI}.$$

电子从轴线上出发，圆心与轴线的距离也是 ρ ，所以轨迹离轴最远的距离为 2ρ ，不是 ρ 。要使所有 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 的电子均不碰壁，必须有

$$\frac{2mv \sin \alpha}{e\mu_0 NI} < r.$$



垂直于 x 轴的截面。小圆为电子轨迹投影，大圆为内壁。

答 $I > \frac{2mv \sin \alpha}{e\mu_0 N r}$ 。

解说

最不利的发射方向 在原题的前向圆锥范围内， $\sin \theta$ 随 θ 增大而增大，边缘方向 $\theta = \alpha$ 给出最大的回旋半径。

等号也会碰壁 $2\rho = r$ 时轨迹恰好接触内壁，仍属于碰撞，所以不碰壁条件必须是严格大于。

不能把轴线当作回旋圆心 电子从轴线上开始运动，而不是围绕轴线本身作半径 ρ 的圆周运动。因而只写 $\rho < r$ 会把所需最小磁场、电流低估一半。

问 7 第一次回到轴线的时

解答

当 $0 < \theta \leq \alpha$ 时，垂直速度非零。电子的横向投影从轴线位置出发，沿半径 ρ 的圆运动，第一次再次经过该点需要转完整一周。因此

$$T = \frac{2\pi\rho}{v_{\perp}} = \frac{2\pi}{v \sin \theta} \frac{mv \sin \theta}{eB} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

代入 $B = \mu_0 NI$,

答 $T = \frac{2\pi m}{e\mu_0 NI}$ (非轴向发射)。 $\theta = 0$ 时电子一直在轴线上，不存在独立的“首次返回”时刻。

解说

一周而不是半周 半周时电子在横向圆的另一端，离轴距离恰为 2ρ ，并没有回到轴线。问 6 的不碰壁条件与这里的周期，正好由同一个横向圆的几何结构决定。

为何与角度和速率无关 回旋半径与 $v_{\perp}$ 成正比，圆周长也与 $v_{\perp}$ 成正比，再除以 $v_{\perp}$ 求时间，二者相消。这一结论使用非相对论模型中的固定电子质量 m 。

纯轴向特例单独处理 不能在 $v_{\perp} = 0$ 时直接用 $2\pi\rho/v_{\perp}$ ，因为会成为 $0/0$ 。该电子无需绕行就一直在轴线上，与普通螺旋轨道不同。

问 8 第一次回轴时的轴向距离

解答

轴向没有磁力，电子始终以 $v_x = v \cos \theta$ 匀速前进。在问 7 的一周时间内，轴向位移为

$$\Delta x = v \cos \theta T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{e\mu_0 NI}.$$

答 $\Delta x = \frac{2\pi m v \cos \theta}{e\mu_0 NI}$ ($0 < \theta \leq \alpha$)。这也是相应螺旋轨道的螺距。

解说

同一个周期，不同的回轴位置 虽然所有非轴向电子的回旋周期相同，但轴向速度 $v \cos \theta$ 随角度不同，第一次回轴的位置也不同。因此有限张角的电子束不会在同一个轴向点上精确聚焦。

小张角时的近似 若 θ 很小，可用 $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ 。回轴位置相对于轴向速度 v 对应的参考距离，只出现二阶角度差，这说明为什么窄角度束在近似上能形成较集中的回轴区域。

磁场强弱 在其他参数固定时， I 增大使磁场增强，回旋半径、周期与螺距都减小。但总速率并未降低；空间中的螺旋只是绕得更紧。

轴向特例 $\theta = 0$ 时可计算经过时间 T 后的路程 vT ，却不应把它称为“首次回轴距离”，因为电子从未离开轴线。