

问 4 转折点与通过原点的速度

解答

现在 $D > 0$ 且 $k_R > k_L$ 。释放时左弹簧自然长，故 $x(0) = -D$ 、 $v(0) = 0$ 。振幅为

$$A = x_c + D = \frac{2k_R}{K}D.$$

所以最小位置为 $x_{\min} = -D$ ，最大位置为

$$x_{\max} = x_c + A = 2x_c + D = \frac{3k_R - k_L}{K}D.$$

释放时总势能为 $2k_RD^2$ ；原点处总势能为 $KD^2/2$ 。由能量守恒，

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2k_RD^2 - \frac{1}{2}KD^2 = \frac{1}{2}(3k_R - k_L)D^2.$$

答 $x_{\min} = -(L - \ell)$, $x_{\max} = \frac{3k_R - k_L}{k_L + k_R}(L - \ell)$, $v = \pm(L - \ell)\sqrt{\frac{3k_R - k_L}{m}}$ 。第一次通过原点取正号，返回时取负号。

解说

转折点关于平衡点对称 $x_{\min} + x_{\max} = 2x_c$ ，不是 0。若把两侧最大位移直接写成 $\pm D$ ，就错误地把原点当成了振动中心。

“速度”保留方向 原点在两个转折点之间，每周期经过两次。速率只有一个大小，但速度有正、负两个值；首次从左端释放后向右，故先取正号。

题设的运动范围 本题已假定不撞墙，所求转折点应在允许区域内。若为任意参数另建实际装置，还需检查 $x_{\max} < L$ ，不能忽略墙的位置。

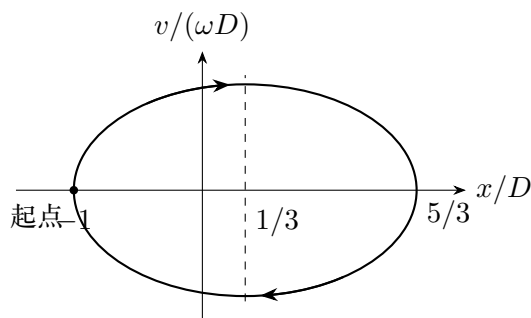
问5 单次释放的相轨迹与运动方向

解答

用 $\omega = \sqrt{K/m}$ 、 $A = 2k_R D/K$ ，由能量守恒得

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(x - x_c)^2 = \frac{1}{2}KA^2, \quad \frac{(x - x_c)^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1.$$

这是以 $(x_c, 0)$ 为中心的椭圆。初始点 $(-D, 0)$ 在左端，开始时加速度向右、速度变正，所以先沿上半椭圆向右，再沿下半椭圆向左，按顺时针绕行。



绘图例取 $k_R = 2k_L$ ；纵、横坐标分别按 ωD 、 D 归一化。

答 相轨迹为上述椭圆，起点在左端，沿顺时针运动； $x = x_c = \frac{k_R - k_L}{k_L + k_R}(L - \ell)$ 时速率最大。

解说

速率最大不在一般的原点 $v^2 = \omega^2[A^2 - (x - x_c)^2]$ 在 $x = x_c$ 处最大，此处势能最低。

图上的上下半部 上半部 $v > 0$ 意味着 x 增加，下半部 $v < 0$ 意味着 x 减小。箭头来自实际速度的符号，不是随意指定的绕行方向。

椭圆不是空间中的运动轨道 物体实际只沿一条直线往返；纵轴画的是速度，而不是另一个空间坐标。

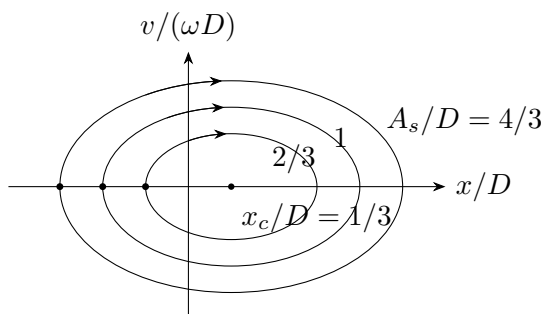
问6 改变释放位置后的相轨迹族

解答

设静止释放位置为 x_s ，则新的振幅为 $A_s = |x_s - x_c|$ 。每条轨迹满足

$$(x - x_c)^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A_s^2.$$

改变 x_s 只改变右侧的常数，不改变共同中心 $(x_c, 0)$ 或纵横半轴之比 ω 。下图给出三个不同的振幅，均从左端静止释放。



仍取 $k_R = 2k_L$ 。三个黑点表示不同的静止释放位置。

答 得到同心、相似的椭圆族；振幅为 $|x_s - x_c|$ 。若 $x_s = x_c$ ，轨迹退化为中心的一个静止点。

解说

不同释放点可能对应同一条椭圆 x_c 左右等距离的两个释放点有相同振幅与能量，只是从同一椭圆的不同端点出发。因此画“两条以上不同轨迹”时，需要选择不同的 $|x_s - x_c|$ 。

频率与振幅 每条椭圆纵半轴为 ωA_s 、横半轴为 A_s ，比值不变。这表现了理想线性弹簧的频率不依赖振幅。

与上一年度的区别 本题没有摩擦，轨迹是闭合曲线，不会逐圈收缩。2025 年度的干摩擦问题不能照用这组恒能量椭圆。

问 7 相轨迹对应的守恒量

解答

总机械能为动能与两根弹簧的势能之和：

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_L(D+x)^2 + \frac{1}{2}k_R(D-x)^2.$$

利用问 3 的配方形式，

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K(x-x_c)^2 + U_{\min}.$$

沿每条相轨迹， A_s 为常数，因此

$$E = \frac{1}{2}KA_s^2 + U_{\min}$$

也为常数。故这些曲线是总机械能的等值线。

答 守恒量为总机械能： $E = \frac{1}{2}mv^2 + U_L + U_R$ 。

解说

不是动能或势能各自守恒 到转折点时 $v = 0$ ，动能为零；经过平衡点时动能最大。两种能量彼此转换，总和才不变。

轨迹离中心越远能量越高 $E - U_{\min} = KA_s^2/2$ 随振幅平方增加。图中嵌套椭圆从内到外对应越来越高的机械能。

最低能量态 中心点 $(x_c, 0)$ 具有 $E = U_{\min}$ 。即使这个值不为零，物体仍可静止，因为势能的绝对零点不决定合力，势能梯度才决定合力。

用运动方程检查

$$\frac{dE}{dt} = mv\dot{v} + K(x-x_c)\dot{x} = v[m\dot{v} + K(x-x_c)] = 0.$$

无摩擦且墙不动，确实没有外界持续向系统输入或带走机械能。

问 5 洛伦兹力的两个分量

解答

电子速度分解为

$$v_{\parallel} = v \cos \theta, \quad v_{\perp} = v \sin \theta.$$

磁场沿 x 轴, $\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 始终垂直于磁场。因此 x 方向的力为零, 垂直分量的大小为

$$F_{\perp} = eBv_{\perp} = e\mu_0 NI v \sin \theta.$$

答 $F_x = 0, F_{\perp} = e\mu_0 NI v \sin \theta$ 。

解说

负电荷影响转向, 不影响力的大小 电子带 $-e$, 其受力方向与正电荷相反; 题目要求分量的大小, 所以大小公式使用 $e > 0$ 。

平行运动保持匀速 $F_x = 0$ 意味着 $v_{\parallel} = v \cos \theta$ 恒定。垂直部分则受到向心力, 形成圆周运动, 两部分合起来构成螺旋运动。

磁场不改变总速率 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$, 磁场不做功。垂直分量的方向改变, 但其大小 $v \sin \theta$ 不变, 总速率也保持 v 。

轴向射出的特例 $\theta = 0$ 时 $v_{\perp} = 0$, 洛伦兹力为零, 电子一直沿 x 轴直线运动, 不形成具有非零半径的螺旋。

问6 不撞内壁的电流条件

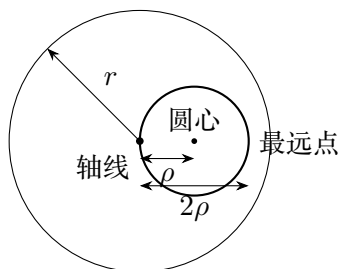
解答

设电子垂直投影的回旋半径为 ρ 。由向心力关系，

$$\frac{mv_{\perp}^2}{\rho} = eBv_{\perp}, \quad \rho = \frac{mv \sin \theta}{e\mu_0 NI}.$$

电子从轴线上出发，圆心与轴线的距离也是 ρ ，所以轨迹离轴最远的距离为 2ρ ，不是 ρ 。要使所有 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 的电子均不碰壁，必须有

$$\frac{2mv \sin \alpha}{e\mu_0 NI} < r.$$



垂直于 x 轴的截面。小圆为电子轨迹投影，大圆为内壁。

答 $I > \frac{2mv \sin \alpha}{e\mu_0 Nr}.$

解说

最不利的发射方向 在原题的前向圆锥范围内， $\sin \theta$ 随 θ 增大而增大，边缘方向 $\theta = \alpha$ 给出最大的回旋半径。

等号也会碰壁 $2\rho = r$ 时轨迹恰好接触内壁，仍属于碰撞，所以不碰壁条件必须是严格大于。

不能把轴线当作回旋圆心 电子从轴线上开始运动，而不是围绕轴线本身作半径 ρ 的圆周运动。因而只写 $\rho < r$ 会把所需最小磁场、电流低估一半。

问 7 第一次回到轴线的時間

解答

当 $0 < \theta \leq \alpha$ 时，垂直速度非零。电子的横向投影从轴线位置出发，沿半径 ρ 的圆运动，第一次再次经过该点需要转完整一周。因此

$$T = \frac{2\pi\rho}{v_{\perp}} = \frac{2\pi}{v \sin \theta} \frac{mv \sin \theta}{eB} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

代入 $B = \mu_0 NI$,

答 $T = \frac{2\pi m}{e\mu_0 NI}$ (非轴向发射)。 $\theta = 0$ 时电子一直在轴线上，不存在独立的“首次返回”时刻。

解说

一周而不是半周 半周时电子在横向圆的另一端，离轴距离恰为 2ρ ，并没有回到轴线。问 6 的不碰壁条件与这里的周期，正好由同一个横向圆的几何结构决定。

为何与角度和速率无关 回旋半径与 $v_{\perp}$ 成正比，圆周长也与 $v_{\perp}$ 成正比，再除以 $v_{\perp}$ 求时间，二者相消。这一结论使用非相对论模型中的固定电子质量 m 。

纯轴向特例单独处理 不能在 $v_{\perp} = 0$ 时直接用 $2\pi\rho/v_{\perp}$ ，因为会成为 $0/0$ 。该电子无需绕行就一直在轴线上，与普通螺旋轨道不同。

问8 第一次回轴时的轴向距离

解答

轴向没有磁力，电子始终以 $v_x = v \cos \theta$ 匀速前进。在问7的一周时间内，轴向位移为

$$\Delta x = v \cos \theta T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{e\mu_0 N I}.$$

答 $\Delta x = \frac{2\pi m v \cos \theta}{e\mu_0 N I}$ ($0 < \theta \leq \alpha$)。这也是相应螺旋轨道的螺距。

解说

同一个周期，不同的回轴位置 虽然所有非轴向电子的回旋周期相同，但轴向速度 $v \cos \theta$ 随角度不同，第一次回轴的位置也不同。因此有限张角的电子束不会在同一个轴向点上精确聚焦。

小张角时的近似 若 θ 很小，可用 $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ 。回轴位置相对于轴向速度 v 对应的参考距离，只出现二阶角度差，这说明为什么窄角度束在近似上能形成较集中的回轴区域。

磁场强弱 在其他参数固定时， I 增大使磁场增强，回旋半径、周期与螺距都减小。但总速率并未降低；空间中的螺旋只是绕得更紧。

轴向特例 $\theta = 0$ 时可计算经过时间 T 后的路程 vT ，却不应把它称为“首次回轴距离”，因为电子从未离开轴线。