

第1题 2024 年度 I: 公共弦与固定点

这一题先证明两个交点始终存在，再利用二次项相消确定公共弦。最后的中点条件只需处理横坐标，不必分别解出两个交点。每一步都要说明所用对象确实存在，不能先假设直线或交点坐标已经定义。

对应官方问题册：第2页（PDF 页码）。请与原题对照阅读。

问1 两个交点为什么始终不同

解答

令两条抛物线在同一横坐标处的纵坐标相等，移项得到

$$F(x) = 2x^2 + (a + a^2)x + a - a^2 - 2 = 0.$$

其中常数项可写成

$$a - a^2 - 2 = - \left[\left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \right] < 0.$$

判别式为

$$\begin{aligned} D &= (a + a^2)^2 - 8(a - a^2 - 2) \\ &= (a + a^2)^2 + 8 \left[\left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \right] > 0. \end{aligned}$$

因此对任意实数 a ，方程有两个不同实根。每个实根在两条函数图像上给出同一纵坐标，且两个横坐标不同，所以恰有两个不同交点。

答 对任意实数 a ，两条抛物线恰有两个不同交点。

解说

不必把四次式全部展开 判别式含 a 的四次式，但需要证明的是严格为正。保留平方项，把剩余二次式配方，正性就能直接读出。仅写 $D \geq 0$ 不足以排除两交点重合，本题要得到严格不等式。

从根的乘积也能看出结构 二根乘积为 $(a - a^2 - 2)/2 < 0$ 。若已知根为实数，就能看出二根异号。更直接地， $F(0) < 0$ 而二次函数两端趋向正无穷，因此零点一负一正。这也解释了为什么任何参数值都不会出现相切或不相交。

代数根与平面交点是一一对应的 这里两条曲线都以 y 作为 x 的单值函数。给定一个公共横坐标，纵坐标随之确定，不能再乘二。反过来，交点横坐标必须满足 $F(x) = 0$ ，所以这两个根没有遗漏或额外引入交点。

问2 二次项相消后得到公共弦

解答

设一个交点为 (x, y) 。把该点满足的两条曲线方程相加，有

$$2y = (a - a^2)x + a - a^2 + 2.$$

因此两个交点都在直线

$$\ell: y = \frac{a - a^2}{2}(x + 1) + 1$$

上。问1已证明交点不同，故过这两点的直线唯一，上式就是所求公共弦所在直线。

把 $x = -1$ 代入可得 $y = 1$ ，不依赖 a ，所以固定点为 $P = (-1, 1)$ 。若还要说明这样的公共点只有一个，可比较 $a = 0$ 与 $a = -1$ ：相应两条直线分别是 $y = 1$ 与 $y = -x$ ，它们的唯一交点就是 $(-1, 1)$ 。

答 $\ell: y = \frac{a - a^2}{2}(x + 1) + 1, \quad P = (-1, 1).$

解说

相加的对象是同一个交点的两条等式 两抛物线上的任意两个点不能这样相加。只有公共点的同一组 (x, y) 同时满足两条方程，才能消去 x^2 并得到该点必在的直线。

找到必要条件后还要辨认是哪条直线 相加所得等式不与原来的两条曲线方程组等价，它单独还有很多非交点。但我们只需一条包含两个交点的直线；由两点确定一直线，就已经足够，无须证明直线上所有点都是交点。

把参数放在一个整体里 写成 $y - 1 = \frac{a - a^2}{2}(x + 1)$ 后，令 $x + 1 = 0$ 即可消除参数。原式若写成斜截式，斜率和截距看似各自变化，反而容易漏掉二者之间的联系。

问3 用韦达定理求中点条件

解答

设两交点横坐标为 x_1, x_2 。由问1的二次方程及韦达定理，

$$x_1 + x_2 = -\frac{a + a^2}{2}.$$

中点 M 的横坐标为

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a + a^2}{4}.$$

若 $M = P$ ，必须有 $x_M = -1$ ，即

$$a^2 + a - 4 = 0.$$

解得 $a = (-1 \pm \sqrt{17})/2$ 。

反之，这两个参数值均使 $x_M = -1$ 。两交点都在 ℓ 上，其中点也在 ℓ 上；而 ℓ 在 $x = -1$ 处的纵坐标恒为 1，因此 $M = (-1, 1) = P$ 。由此必要性和充分性均成立。

答 $a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ 或 $a = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$

解说

为什么不用另外求纵坐标的平均值 公共弦是一条非竖直直线，其纵坐标是横坐标的仿射函数。直线上两点坐标分别取平均仍落在直线上，所以只要中点横坐标与 P 相同，纵坐标就随之相同。若题目换成未确定的曲线，这种简化不一定成立。

不要把固定点误认成任意参数下的中点 P 始终在公共弦上，但不一定把两个交点平分。例如 $a = 0$ 时交点横坐标为 $-1, 1$ ，中点横坐标为 0，而固定点横坐标为 -1 。共线和等距是不同条件。

中心对称的根形式可作核对 当 $a^2 + a = 4$ 时，交点方程化为 $(x + 1)^2 = 4 - a$ 。两个解关于 $x = -1$ 对称，且上面求得的两个 a 都小于 4，确有两个不同实根；这与问1的存在性和中点条件一致。

第3题 2024 年度 III：区间的重叠与复合函数

阶跃函数的代数式很短，但端点是否取到会改变答案。先把乘积改写为闭区间的指示函数，再区分区间是否存在、是否与自己的反射相交，以及复合函数内层实际能取哪些值。以下图中斜线表示所求区域，实线边界包含，空心点不包含；图框外的区域按不等式延伸。

对应官方问题册：第2页（PDF 页码）。请与原题对照阅读。

问1 先确定乘积为1的条件

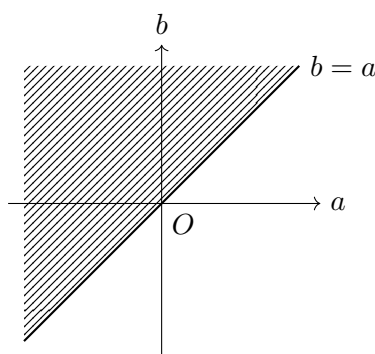
解答

两个因子都只取0或1，所以 $g(x) = 1$ 当且仅当

$$x - a \geq 0, \quad b - x \geq 0,$$

即 $a \leq x \leq b$ 。因此存在使 $g(x) = 1$ 的实数 x ，当且仅当 $a \leq b$ 。若 $a > b$ ，则不存在同时满足两式的 x ， g 恒为0。

答 $a \leq b$ 。



解说

“最大值为1”是存在性条件 不需要每个 x 都使函数等于1。只要闭区间中有一个点，最大值就是1。当 $a = b$ 时，只有 $x = a$ 这一点使 $g(x) = 1$ ，仍应保留整条直线 $b = a$ 。

严格不等式会漏掉端点 定义在输入为0时取1，所以两个条件都必须带等号。将闭区间写成开区间，会错误地排除 $a = b$ ，并影响后面两个区间刚好接触时的最大值。

图中的坐标与函数变量不同 图中横坐标是参数 a ，纵坐标是参数 b ，不是 $x, g(x)$ 。区域上方表示参数满足 $b \geq a$ ，不表示函数 g 本身是一条斜线。

问2 两个闭区间存在但互不相交

解答

当 $a \leq b$ 时， $g(x)$ 是区间 $[a, b]$ 的指示函数，而

$$g(-x) = 1 \iff a \leq -x \leq b \iff -b \leq x \leq -a.$$

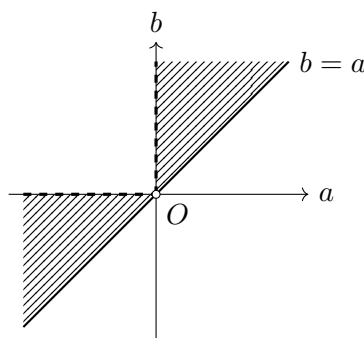
故 $g(x) + g(-x)$ 在重叠处取2，只落在其中一个区间时取1，两者之外取0。

要使最大值恰为 1，两个区间必须非空且没有交集。由于它们互为关于 0 的反射，这等价于 $[a, b]$ 全部位于 0 的同一侧，且不含 0。因此有两种情形：

$$0 < a \leq b, \quad \text{或} \quad a \leq b < 0.$$

当 $a > b$ 时两个函数均恒为 0，不在本问范围内。

答 $\{0 < a \leq b\} \cup \{a \leq b < 0\}$.



解说

一个反射就会交换左右端点 $a \leq -x \leq b$ 乘以 -1 后，不等号方向都要反转。反射区间是 $[-b, -a]$ ，不是 $[-a, -b]$ 。

坐标轴边界不属于本问 若 $a = 0 \leq b$ ，则 $g(0) = g(-0) = 1$ ，和为 2； $a \leq b = 0$ 同理。图中与这两条边界对应的虚线不属于区域。非零的 $a = b$ 则保留，因为两个单点区间分别位于 a 和 $-a$ ，互不相同。

用区间交集检验也得到同一条件 交集非空当且仅当 $\max(a, -b) \leq \min(b, -a)$ 。连同 $a \leq b$ ，它等价于 $a \leq 0 \leq b$ 。本问取其在非空区间情形下的补集，即区间完全在正半轴或负半轴。

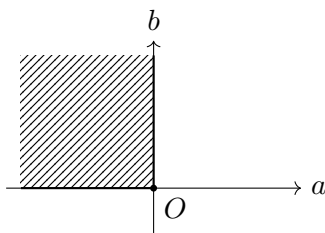
问3 区间交叠时最大值为 2

解答

若 $a \leq 0 \leq b$ ，取 $x = 0$ 即有 $g(0) + g(-0) = 2$ ，而每项最多为 1，所以最大值正是 2。

反之，若存在 x 使和为 2，则 x 和 $-x$ 均在闭区间 $[a, b]$ 内。一个区间含两个数，就包含它们的中点 0，因此 $a \leq 0 \leq b$ 。这同时排除了 $a > b$ 。

答 $a \leq 0, \quad b \geq 0$.



解说

两区间只在一点相接也足够 $a = 0$ 或 $b = 0$ 时, 重叠可能只剩 $x = 0$, 但最大值仍为 2。这里不是要求交集有正长度, 因此不能改成 $a < 0 < b$ 。

三个最大值情形可以相互核对 $a > b$ 时最大值 0; $a \leq b$ 且区间不含 0 时最大值 1; $a \leq 0 \leq b$ 时最大值 2。这三类互斥且覆盖整个参数平面, 有助于发现漏掉的边界。

为何单独取 $x = 0$ 能达到上界 和的理论上限为 2。必要条件说明, 若任何 x 能达到 2, 0 也一定在区间内; 所以取 0 不是碰巧猜到一个例子, 而是由反射对称性给出的通用取值。

问 4 先求内层函数的值域**解答**

要使 $g(h(x))$ 的最大值为 1, 必须存在 x 使

$$a \leq h(x) \leq b.$$

首先 $a > b$ 时 g 恒为 0, 无解。若 $a < b$, 内层函数依次为

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & a \leq x < b, \\ 2, & x \geq b. \end{cases}$$

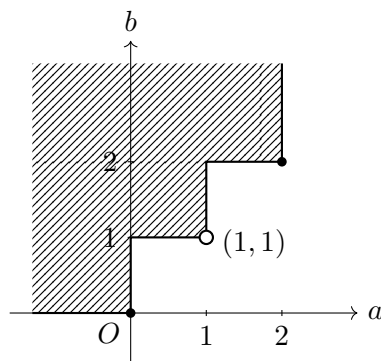
三个值 0、1、2 都能取到, 故条件是闭区间 $[a, b]$ 至少包含其中一个整数。

若 $a = b = t$, 则 $h(x)$ 在 $x < t$ 时为 0, 在 $x \geq t$ 时为 2, 并不取 1。此时 g 只在输入等于 t 时为 1, 所以 t 只能是 0 或 2, 不能是 1。

综合两类, 所求区域可写为

$$(\{a \leq 0 \leq b\} \cup \{a \leq 1 \leq b\} \cup \{a \leq 2 \leq b\}) \setminus \{(1, 1)\}.$$

答 上面三个闭区域的并集, 删去点 $(1, 1)$ 。点 $(0, 0)$ 和 $(2, 2)$ 保留。

**解说**

不能给内层函数任意实数作为输出 h 的输出只可能是 0、1、2 中的一部分; 判断复合函数能否取 1, 应比较这一实际值域与 $[a, b]$, 不能把 g 的任意实数输入都算进来。

边界点可直接核对 $a = b$ 时 h 只取 0 和 2, 故只删 $(1, 1)$; $(0.5, 1.5)$ 含 1 而保留, $(0.2, 0.8)$ 无 0、1、2。

第 8 题 2026 年度 II: 复数圆上的直角与虚部最小值

复数的商可以判断两条线段的夹角，圆的方程则把二次量化成一次量。最后一问最小化的是 z^2 的虚部，而不是实部；先确定虚部的符号，再求极值，才能选出正确的那个点。

对应官方问题册：第 2 页（PDF 页码）。请与原题对照阅读。

问 1 用纯虚数的商判断垂直

解答

将圆的条件平方、展开，得到

$$|z|^2 + \operatorname{Re} z = 0.$$

由于 $z \neq 0$ ，可除以 $|z|^2$ ，故

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{\operatorname{Re} \bar{z}}{|z|^2} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} = -1.$$

从点 C 出发的两向量所对应的复数分别为 $1 - z^2$ 和 $z - z^2$ 。它们的商为

$$\frac{1 - z^2}{z - z^2} = \frac{(1 - z)(1 + z)}{z(1 - z)} = 1 + \frac{1}{z}.$$

这里 $z \neq 0$ 且 $z \neq 1$ ；后者因为 1 不在给定圆上。因此分母非零。这个商的实部等于 $1 - 1 = 0$ 。它也不为 0，因为等于 0 将给出 $z = -1$ ，已被排除。所以它是非零纯虚数，辐角为 $\pi/2$ 或 $-\pi/2$ ，两向量互相垂直。这就证明 $\angle ACB$ 为直角。

答 $\angle ACB = 90^\circ$ 。

解说

为什么是从 C 出发的差 $\angle ACB$ 的顶点在 C ，所以要比较 $A - C$ 与 $B - C$ ，而不是直接比较 z 与 z^2 的辐角。复数商的辐角等于分子、分母辐角之差，正好表示两向量的夹角。

圆的方程让倒数落在一条直线上 圆上各点满足 $\operatorname{Re}(1/z) = -1$ ，所以 $1 + 1/z$ 的实部恒为 0。这里不是逐个计算 z 的辐角，而是利用圆方程把整个轨迹映成虚轴。

两个被排除的点都有几何作用 $z = 0$ 时 $B = C$ ， $z = -1$ 时 $A = C$ ，三角形都退化。证明商为纯虚数时还须排除商为 0，才真正得到两条非零向量构成的直角。

问 2 模与辐角之间的负号

解答

令 $r = |z| > 0$ ，并写成 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 。由问 1 展开的圆方程，

$$r^2 + r \cos \theta = 0.$$

因为 $r > 0$ ，约去 r 可得 $r = -\cos \theta$ 。

答 $|z| = -\cos \theta$ 。

若选取 $0 \leq \theta < 2\pi$ 这一组辐角代表，则 $r > 0$ 要求 $\cos \theta < 0$ ；又 $\theta = \pi$ 时 $r = 1$ ， $z = -1$ ，不允许取

到。因此

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad \text{或} \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

其他辐角只相差 2π 的整数倍, 模的表达式不变。

解说

模为正决定取值所在的半平面 给定圆除原点外位于左半平面, 因此 $\cos \theta$ 应为负。式子 $|z| = -\cos \theta$ 与这个几何位置一致; 若误写成 $\cos \theta$, 模就变成了负数。

约去 r 要用到排除原点 展开后有 $r(r + \cos \theta) = 0$ 。题设 $z \neq 0$ 使 $r = 0$ 这一分支不在讨论范围内。直接约分而不说明这一点, 会遗漏解法成立的前提。

一个具体点的检查 圆上点 $z = (-1+i)/2$ 的模为 $1/\sqrt{2}$, 辐角可取 $3\pi/4$ 。代入得 $-\cos(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, 检查了符号和圆半径带来的系数。

问 3 先求虚部最小的点, 再算直角三角形面积

解答

设 $z = x + iy$ 。圆方程给出

$$x^2 + y^2 = -x, \quad -1 < x < 0, \quad \operatorname{Im}(z^2) = 2xy.$$

因为 $x < 0$, 当 $y < 0$ 时 $2xy > 0$, 当 $y > 0$ 时 $2xy < 0$ 。圆的上半部分确实包含允许点, 所以全体中的最小值必在 $y > 0$ 处取得。

令 $t = -x$, 则 $0 < t < 1$, $y = \sqrt{t - t^2}$, 于是

$$\operatorname{Im}(z^2) = -2t\sqrt{t - t^2}.$$

为了使这个负数最小, 需要使非负数 $2t\sqrt{t - t^2}$ 最大。平方不改变非负数之间的大小关系, 只需最大化

$$F(t) = 4t^3(1 - t), \quad F'(t) = 4t^2(3 - 4t).$$

F 在 $(0, 3/4)$ 递增, 在 $(3/4, 1)$ 递减, 故唯一最大点为 $t = 3/4$ 。因此

$$x = -\frac{3}{4}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad z = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad \min \operatorname{Im}(z^2) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

在此点,

$$|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |1 - z| = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad |1 + z| = \frac{1}{2}.$$

由问 1, 直角在 C 。两直角边的长度是

$$BC = |z - z^2| = |z||1 - z| = \frac{\sqrt{39}}{4}, \quad AC = |1 - z^2| = |1 - z||1 + z| = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

所以三角形面积为

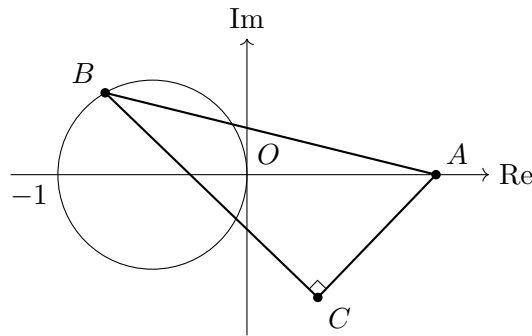
$$[ABC] = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{13\sqrt{3}}{32}.$$

答 $z = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$, 对应面积为 $\frac{13\sqrt{3}}{32}$ 。

解说

平方以前先确定需要的符号 若直接最大化 $(2xy)^2$ ，会上、下半圆各得到一个点。其中下半圆给出的是虚部最大值，不是最小值。本题必须保留 $y > 0$ 这一判断。

图中 C 并不在原来的圆上 下图取最小点 B ，此时 $C = z^2 = 3/8 - (3\sqrt{3}/8)i$ 。圆是 B 的轨迹，而 C 是平方映射后的点，不能把两个点都放在同一个圆上。



用坐标面积核对边长计算 取 $A = (1, 0)$ 、 $B = (-3/4, \sqrt{3}/4)$ 、 $C = (3/8, -3\sqrt{3}/8)$ ，两向量 $\overrightarrow{AB} = (-7/4, \sqrt{3}/4)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (-5/8, -3\sqrt{3}/8)$ 给出的面积是

$$\frac{1}{2} \left| \left(-\frac{7}{4} \right) \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{5}{8} \right) \right| = \frac{13\sqrt{3}}{32}.$$

这也检验了直角边不能误用 AB 的问题。