

第3問 2024 年度 III：区间的重叠与复合函数

阶跃函数的代数式很短，但端点是否取到会改变答案。先把乘积改写为闭区间的指示函数，再区分区间是否存在、是否与自己的反射相交，以及复合函数内层实际能取哪些值。以下图中斜线表示所求区域，实线边界包含，空心点不包含；图框外的区域按不等式延伸。

对应官方问题册：第2页（PDF 页码）。请与原题对照阅读。

问1 先确定乘积为1的条件

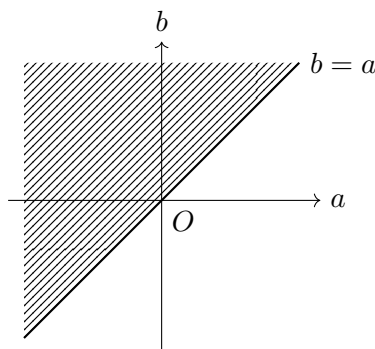
解答

两个因子都只取0或1，所以 $g(x) = 1$ 当且仅当

$$x - a \geq 0, \quad b - x \geq 0,$$

即 $a \leq x \leq b$ 。因此存在使 $g(x) = 1$ 的实数 x ，当且仅当 $a \leq b$ 。若 $a > b$ ，则不存在同时满足两式的 x ， g 恒为0。

答 $a \leq b$ 。



解说

“最大值为1”是存在性条件 不需要每个 x 都使函数等于1。只要闭区间中有一个点，最大值就是1。当 $a = b$ 时，只有 $x = a$ 这一点使 $g(x) = 1$ ，仍应保留整条直线 $b = a$ 。

严格不等式会漏掉端点 定义在输入为0时取1，所以两个条件都必须带等号。将闭区间写成开区间，会错误地排除 $a = b$ ，并影响后面两个区间刚好接触时的最大值。

图中的坐标与函数变量不同 图中横坐标是参数 a ，纵坐标是参数 b ，不是 $x, g(x)$ 。区域上方表示参数满足 $b \geq a$ ，不表示函数 g 本身是一条斜线。

问2 两个闭区间存在但互不相交

解答

当 $a \leq b$ 时, $g(x)$ 是区间 $[a, b]$ 的指示函数, 而

$$g(-x) = 1 \iff a \leq -x \leq b \iff -b \leq x \leq -a.$$

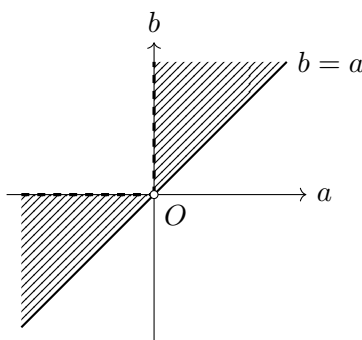
故 $g(x) + g(-x)$ 在重叠处取 2, 只落在其中一个区间时取 1, 两者之外取 0。

要使最大值恰为 1, 两个区间必须非空且没有交集。由于它们互为关于 0 的反射, 这等价于 $[a, b]$ 全部位于 0 的同一侧, 且不含 0。因此有两种情形:

$$0 < a \leq b, \quad \text{或} \quad a \leq b < 0.$$

当 $a > b$ 时两个函数均恒为 0, 不在本问范围内。

答 $\{0 < a \leq b\} \cup \{a \leq b < 0\}$.



解说

一个反射就会交换左右端点 $a \leq -x \leq b$ 乘以 -1 后, 不等号方向都要反转。反射区间是 $[-b, -a]$, 不是 $[-a, -b]$ 。

坐标轴边界不属于本问 若 $a = 0 \leq b$, 则 $g(0) = g(-0) = 1$, 和为 2; $a \leq b = 0$ 同理。图中与这两条边界对应的虚线不属于区域。非零的 $a = b$ 则保留, 因为两个单点区间分别位于 a 和 $-a$, 互不相同。

用区间交集检验也得到同一条件 交集非空当且仅当 $\max(a, -b) \leq \min(b, -a)$ 。连同 $a \leq b$, 它等价于 $a \leq 0 \leq b$ 。本问取其在非空区间情形下的补集, 即区间完全在正半轴或负半轴。

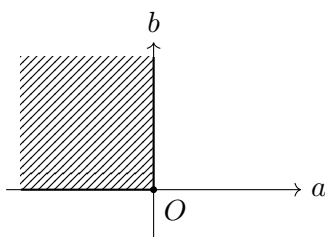
问3 区间交叠时最大值为2

解答

若 $a \leq 0 \leq b$, 取 $x = 0$ 即有 $g(0) + g(-0) = 2$, 而每项最多为 1, 所以最大值正是 2。

反之, 若存在 x 使和为 2, 则 x 和 $-x$ 均在闭区间 $[a, b]$ 内。一个区间含两个数, 就包含它们的中点 0, 因此 $a \leq 0 \leq b$ 。这同时排除了 $a > b$ 。

答 $a \leq 0, \quad b \geq 0$ 。



解说

两区间只在一点相接也足够 $a = 0$ 或 $b = 0$ 时, 重叠可能只剩 $x = 0$, 但最大值仍为 2。这里不是要求交集有正长度, 因此不能改成 $a < 0 < b$ 。

三个最大值情形可以相互核对 $a > b$ 时最大值 0; $a \leq b$ 且区间不含 0 时最大值 1; $a \leq 0 \leq b$ 时最大值 2。这三类互斥且覆盖整个参数平面, 有助于发现漏掉的边界。

为何单独取 $x = 0$ 能达到上界 和的理论上限为 2。必要条件说明, 若任何 x 能达到 2, 0 也一定在区间内; 所以取 0 不是碰巧猜到一个例子, 而是由反射对称性给出的通用取值。

问4 先求内层函数的值域

解答

要使 $g(h(x))$ 的最大值为 1，必须存在 x 使

$$a \leq h(x) \leq b.$$

首先 $a > b$ 时 g 恒为 0，无解。若 $a < b$ ，内层函数依次为

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & a \leq x < b, \\ 2, & x \geq b. \end{cases}$$

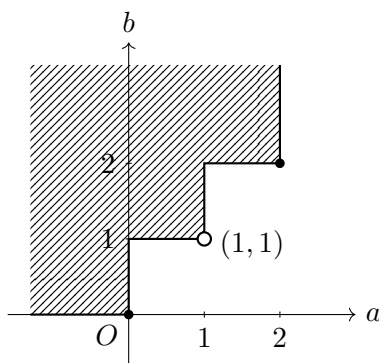
三个值 0、1、2 都能取到，故条件是闭区间 $[a, b]$ 至少包含其中一个整数。

若 $a = b = t$ ，则 $h(x)$ 在 $x < t$ 时为 0，在 $x \geq t$ 时为 2，并不取 1。此时 g 只在输入等于 t 时为 1，所以 t 只能是 0 或 2，不能是 1。

综合两类，所求区域可写为

$$(\{a \leq 0 \leq b\} \cup \{a \leq 1 \leq b\} \cup \{a \leq 2 \leq b\}) \setminus \{(1, 1)\}.$$

答 上面三个闭区域的并集，删去点 $(1, 1)$ 。点 $(0, 0)$ 和 $(2, 2)$ 保留。



解说

不能给内层函数任意实数作为输出 g 的自变量虽然可以是任意实数，但 h 的输出只能是 0、1、2 中的一部分。复合函数能否取到 1，必须用 h 的实际值域与 g 取 1 的区间相交，不能只沿用问 1 的 $a \leq b$ 。

唯一需要挖去的对角线点 三个闭区域各自与 $a = b$ 相交于 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ 。在 $a = b$ 时内层跳过 1，所以只有中间一点要删除；另外两个点分别可通过 $h = 0$ 和 $h = 2$ 达到。

用点检验阶梯边界 例如 $(a, b) = (0.5, 1.5)$ 时 h 能取 1，故保留； $(0.2, 0.8)$ 的区间不含 0、1、2，故排除。在 $(1, 1)$ 处，即使 g 在输入 1 时等于 1，内层永远不能给出 1，所以复合函数仍恒为 0。这三点分别检验区域内部、阶梯外部和被删去的特殊点。

第 8 問 2026 年度 II: 复数圆上的直角与虚部最小值

复数的商可以判断两条线段的夹角，圆的方程则把二次量化成一次量。最后一问最小化的是 z^2 的虚部，而不是实部；先确定虚部的符号，再求极值，才能选出正确的那个点。

对应官方问题册：第 2 页（PDF 页码）。请与原题对照阅读。

问 1 用纯虚数的商判断垂直

解答

将圆的条件平方、展开，得到

$$|z|^2 + \operatorname{Re} z = 0.$$

由于 $z \neq 0$ ，可除以 $|z|^2$ ，故

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{\operatorname{Re} \bar{z}}{|z|^2} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} = -1.$$

从点 C 出发的两向量所对应的复数分别为 $1 - z^2$ 和 $z - z^2$ 。它们的商为

$$\frac{1 - z^2}{z - z^2} = \frac{(1 - z)(1 + z)}{z(1 - z)} = 1 + \frac{1}{z}.$$

这里 $z \neq 0$ 且 $z \neq 1$ ；后者因为 1 不在给定圆上。因此分母非零。这个商的实部等于 $1 - 1 = 0$ 。它也不为 0，因为等于 0 将给出 $z = -1$ ，已被排除。所以它是非零纯虚数，辐角为 $\pi/2$ 或 $-\pi/2$ ，两向量互相垂直。这就证明 $\angle ACB$ 为直角。

解说

为什么是从 C 出发的差 $\angle ACB$ 的顶点在 C ，所以要比较 $A - C$ 与 $B - C$ ，而不是直接比较 z 与 z^2 的辐角。复数商的辐角等于分子、分母辐角之差，正好表示两向量的夹角。

圆的方程让倒数落在一条直线上 圆上各点满足 $\operatorname{Re}(1/z) = -1$ ，所以 $1 + 1/z$ 的实部恒为 0。这里不是逐个计算 z 的辐角，而是利用圆方程把整个轨迹映成虚轴。

两个被排除的点都有几何作用 $z = 0$ 时 $B = C$ ， $z = -1$ 时 $A = C$ ，三角形都退化。证明商为纯虚数时还须排除商为 0，才真正得到两条非零向量构成的直角。

问 2 模与辐角之间的负号

解答

令 $r = |z| > 0$, 并写成 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 。由问 1 展开的圆方程,

$$r^2 + r \cos \theta = 0.$$

因为 $r > 0$, 约去 r 可得 $r = -\cos \theta$ 。

答 $|z| = -\cos \theta$ 。

若选取 $0 \leq \theta < 2\pi$ 这一组辐角代表, 则 $r > 0$ 要求 $\cos \theta < 0$; 又 $\theta = \pi$ 时 $r = 1$ 、 $z = -1$, 不允许取到。因此

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad \text{或} \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

其他辐角只相差 2π 的整数倍, 模的表达式不变。

解说

模为正决定取值所在的半平面 给定圆除原点外位于左半平面, 因此 $\cos \theta$ 应为负。式子 $|z| = -\cos \theta$ 与这个几何位置一致; 若误写成 $\cos \theta$, 模就变成了负数。

约去 r 要用到排除原点 展开后有 $r(r + \cos \theta) = 0$ 。题设 $z \neq 0$ 使 $r = 0$ 这一分支不在讨论范围内。直接约分而不说明这一点, 会遗漏解法成立的前提。

一个具体点的检查 圆上点 $z = (-1+i)/2$ 的模为 $1/\sqrt{2}$, 辐角可取 $3\pi/4$ 。代入得 $-\cos(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, 检查了符号和圆半径带来的系数。

问 3 先求虚部最小的点，再算直角三角形面积**解答**

设 $z = x + iy$ 。圆方程给出

$$x^2 + y^2 = -x, \quad -1 < x < 0, \quad \operatorname{Im}(z^2) = 2xy.$$

因为 $x < 0$ ，当 $y < 0$ 时 $2xy > 0$ ，当 $y > 0$ 时 $2xy < 0$ 。圆的上半部分确实包含允许点，所以全体中的最小值必在 $y > 0$ 处取得。

令 $t = -x$ ，则 $0 < t < 1$ ， $y = \sqrt{t - t^2}$ ，于是

$$\operatorname{Im}(z^2) = -2t\sqrt{t - t^2}.$$

为了使这个负数最小，需要使非负数 $2t\sqrt{t - t^2}$ 最大。平方不改变非负数之间的大小关系，只需最大化

$$F(t) = 4t^3(1 - t), \quad F'(t) = 4t^2(3 - 4t).$$

F 在 $(0, 3/4)$ 递增，在 $(3/4, 1)$ 递减，故唯一最大点为 $t = 3/4$ 。因此

$$x = -\frac{3}{4}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad z = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad \min \operatorname{Im}(z^2) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

在此点，

$$|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |1 - z| = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad |1 + z| = \frac{1}{2}.$$

由问 1，直角在 C 。两直角边的长度是

$$BC = |z - z^2| = |z||1 - z| = \frac{\sqrt{39}}{4}, \quad AC = |1 - z^2| = |1 - z||1 + z| = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

所以三角形面积为

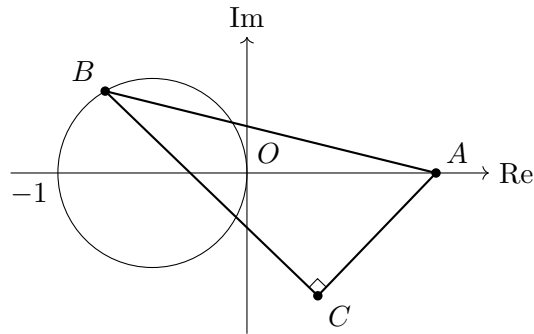
$$[ABC] = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{13\sqrt{3}}{32}.$$

答 $z = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ ，对应面积为 $\frac{13\sqrt{3}}{32}$ 。

解说

平方以前先确定需要的符号 若直接最大化 $(2xy)^2$ ，会上、下半圆各得到一个点。其中下半圆给出的是虚部最大值，不是最小值。本题必须保留 $y > 0$ 这一判断。

图中 C 并不在原来的圆上 下图取最小点 B , 此时 $C = z^2 = 3/8 - (3\sqrt{3}/8)i$ 。圆是 B 的轨迹, 而 C 是平方映射后的点, 不能把两个点都放在同一个圆上。



用坐标面积核对边长计算 取 $A = (1, 0)$ 、 $B = (-3/4, \sqrt{3}/4)$ 、 $C = (3/8, -3\sqrt{3}/8)$, 两向量 $\overrightarrow{AB} = (-7/4, \sqrt{3}/4)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (-5/8, -3\sqrt{3}/8)$ 给出的面积是

$$\frac{1}{2} \left| \left(-\frac{7}{4} \right) \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{5}{8} \right) \right| = \frac{13\sqrt{3}}{32}.$$

这也检验了直角边不能误用 AB 的问题。