

第8题 2026 · 问题2 相切条件下的面积与闭区间上的最值

对应官方问题册：第3页（PDF 页码）。请与原题对照阅读。

本大题的两个小题都属于“微分定条件、积分求量”的标准型。问1先由相切的两个条件（函数值相等、导数相等）定出参数与切点，再分段积分求面积；问2的重点在于把 $f'(x)$ 分解成两个因式，用各自的符号判断增减，并注意闭区间的端点也是最值候选。

问1(1) k 的值与切点 P 的坐标

解答

先化简 C_2 : $y = \log \frac{1}{x} = -\log x$ ($x > 0$)。设切点 P 的 x 坐标为 $p > 0$ 。相切要求函数值与导数都相等：

$$kp^2 = -\log p, \quad 2kp = -\frac{1}{p}.$$

由第二式 $k = -\frac{1}{2p^2}$ 。代入第一式：

$$-\frac{1}{2p^2} \cdot p^2 = -\log p \implies -\frac{1}{2} = -\log p \implies \log p = \frac{1}{2}, \quad p = e^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$k = -\frac{1}{2e}, \quad P\left(e^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\right).$$

答 $k = -\frac{1}{2e}, \quad P\left(e^{1/2}, -\frac{1}{2}\right)$

解说

相切=两个方程 只让 $kp^2 = -\log p$ 成立是“有交点”，再加上导数相等才是“相切”。两个未知数 k, p 对应两个方程，个数正好。

先用导数式解出 k 第二式只含 k 与 p 的简单幂，解出 $k = -\frac{1}{2p^2}$ 后代入第一式， p^2 恰好约去，直接得到 $\log p = \frac{1}{2}$ 。反过来先代第一式会留下对数与幂的混合方程。

定义域 $x > 0$ $\log \frac{1}{x}$ 要求 $x > 0$ ，故 $p > 0$ ， $p = e^{1/2}$ 是唯一解。不写这一条， p 的取舍就缺少依据。

$k < 0$ 与题图一致 $k = -\frac{1}{2e} < 0$ 说明 C_1 是开口向下的抛物线，与 C_2 在第四象限相切，且在原点处 C_1 取到最大值 0——这与官方图示相符。

问1(2) C_1 、 C_2 与 x 轴围成的面积

解答

由(1)， $C_1: y = -\frac{x^2}{2e}$ 、 $C_2: y = -\log x$ ，两者在 $P(e^{1/2}, -\frac{1}{2})$ 相切且无其他交点。 C_1 过原点， C_2 与 x 轴交于 $(1, 0)$ 。所求区域位于 x 轴下方，由三段边界围成。面积等于各段“ x 轴与曲线之间”的面积之和：

$$S = -\int_0^{e^{1/2}} \left(-\frac{x^2}{2e}\right) dx + \int_1^{e^{1/2}} (-\log x) dx.$$

逐项计算。第一项:

$$\int_0^{e^{1/2}} \frac{x^2}{2e} dx = \frac{1}{2e} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{e^{1/2}} = \frac{1}{2e} \cdot \frac{e^{3/2}}{3} = \frac{e^{1/2}}{6}.$$

第二项先求 $\int_1^{e^{1/2}} \log x dx$, 用分部积分:

$$\int_1^{e^{1/2}} \log x dx = \left[x \log x \right]_1^{e^{1/2}} - \int_1^{e^{1/2}} dx = \frac{e^{1/2}}{2} - (e^{1/2} - 1) = 1 - \frac{e^{1/2}}{2}.$$

故 $\int_1^{e^{1/2}} (-\log x) dx = \frac{e^{1/2}}{2} - 1$. 合并:

$$S = \frac{e^{1/2}}{6} + \frac{e^{1/2}}{2} - 1 = \frac{e^{1/2} + 3e^{1/2}}{6} - 1 = \frac{2}{3}e^{1/2} - 1.$$

答 $S = \frac{2}{3}e^{1/2} - 1$ ($= \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1$)

解说

先画出三条边界的相对位置 C_1 从原点向右下方; C_2 从 $(1, 0)$ 向右下方; 两者在 $x = e^{1/2} \approx 1.65$ 相切. 区域的左半由 C_1 与 x 轴夹成 ($0 \leq x \leq e^{1/2}$), 右半的下界换成 C_2 ($1 \leq x \leq e^{1/2}$). 把这两块相加即可.

位于 x 轴下方要加负号 两条曲线在该区间上都取负值, $\int y dx$ 给出的是负数. 面积取绝对值, 故前面加负号 (或直接积 $-y$).

$\int \log x dx$ 的标准做法 把 $\log x$ 写成 $1 \cdot \log x$, 取 $u = \log x$, $v' = 1$, 得 $x \log x - x$. 本题只用到定积分, 端点代入即可.

检算: 数值 $\frac{2}{3}\sqrt{e} - 1 \approx \frac{2}{3} \times 1.6487 - 1 \approx 0.0991$. 区域很窄 (宽约 0.65、最深处约 0.5), 面积在 0.1 量级是合理的. 若算出大于 1 的值, 说明某一段的上下界取反了.

“无其他交点”的作用 它保证在 $0 < x < e^{1/2}$ 上 C_1 始终在 C_2 之上 (更靠近 x 轴), 区域的边界不会在中途互换. 答题时引用题干这一条即可, 不必另行证明.

问 2(1) $f'(x)$

解答

$f(x) = e^{\cos x} - \cos x$. 对第一项用复合函数求导:

$$\frac{d}{dx} e^{\cos x} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x.$$

第二项 $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$. 故

$$f'(x) = -e^{\cos x} \sin x + \sin x = \sin x (1 - e^{\cos x}).$$

答 $f'(x) = \sin x (1 - e^{\cos x})$

解说

一定要提取公因式 $\sin x$ 不提取的话, 判断符号时要同时处理两项的竞争; 提取后变成两个因式的乘积, 符号讨论立刻简化。(2) 完全依赖这一步。

内层导数不要漏负号 $(\cos x)' = -\sin x$, 故 $e^{\cos x}$ 的导数带负号。漏掉它会得到 $f' = \sin x(1 + e^{\cos x})$, 恒非负, 增减表就完全错了。

f' 的零点 $\sin x = 0$ 或 $e^{\cos x} = 1$ (即 $\cos x = 0$)。在 $[0, \pi]$ 上前者给出 $x = 0, \pi$ (端点), 后者给出 $x = \frac{\pi}{2}$ 。三个候选点都要在 (2) 中检查。

问 2(2) $[0, \pi]$ 上的最大值与最小值**解答**

在 $[0, \pi]$ 上 $\sin x \geq 0$, 故 $f'(x)$ 的符号与 $1 - e^{\cos x}$ 一致。指数函数 e^u 以 1 为界: $u > 0 \Leftrightarrow e^u > 1$ 。因此

$$0 < x < \frac{\pi}{2}: \cos x > 0 \Rightarrow e^{\cos x} > 1 \Rightarrow 1 - e^{\cos x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ (减少),}$$

$$x = \frac{\pi}{2}: \cos x = 0 \Rightarrow e^{\cos x} = 1 \Rightarrow f'(x) = 0,$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi: \cos x < 0 \Rightarrow e^{\cos x} < 1 \Rightarrow 1 - e^{\cos x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ (增加).}$$

增减表如下 (端点 $x = 0, \pi$ 处 $f' = 0$, 同为最值候选)。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	$e - 1$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$e^{-1} + 1$

各候选点的值为

$$f(0) = e^1 - 1 = e - 1 \approx 1.718, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^0 - 0 = 1, \quad f(\pi) = e^{-1} + 1 \approx 1.368.$$

比较三者:

$$\text{最大值 } f(0) = e - 1, \quad \text{最小值 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

答 最大值 $e - 1$ (在 $x = 0$), 最小值 1 (在 $x = \frac{\pi}{2}$)

解说

把 f' 的符号交给 $\cos x$ $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上非负, 不改变符号; $1 - e^{\cos x}$ 的符号与 $-\cos x$ 相同。于是整个判号归结为 $\cos x$ 的正负, 一行就能写完。

端点必须参与比较 $x = \frac{\pi}{2}$ 是极小值点, 但最大值出现在端点 $x = 0$ 。闭区间上的最值一定要把两个端点与所有驻点一起比较, 只看驻点会漏掉最大值。

两个端点值不相等 $f(0) = e - 1 \approx 1.718$, $f(\pi) = e^{-1} + 1 \approx 1.368$, $f(0)$ 更大。虽然 $\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上关于 $\frac{\pi}{2}$ 反对称, 但 e^u 不是奇函数, 所以 f 并不对称, 两端必须分别计算。

换元视角 令 $u = \cos x \in [-1, 1]$, 则 $f = e^u - u$, $\frac{df}{du} = e^u - 1$, 在 $u < 0$ 减少、 $u > 0$ 增加, 故 $u = 0$

(即 $x = \frac{\pi}{2}$) 是最小值点 1; 最大值在 $u = \pm 1$ 中取较大者: $e - 1 \approx 1.718 > e^{-1} + 1 \approx 1.368$, 故 $u = 1$ 即 $x = 0$ 。这条路线更短, 可作为答案的别解或检算。

第9题 2026 · 问题3 可动台车上的弹簧振子

对应官方问题册：第4–6页（PDF 页码）。请与原题对照阅读。

本大题把“弹簧振子”与“两体的动量守恒”结合起来。台车被制动器固定时是普通的单振动；制动器一旦松开，台车也会被弹簧推动，两者互为反作用，振动周期随之改变，台车的重心还要按动量守恒来定。(4) 的比较、(5) 与 (7) 的选图题都要写理由，只写记号得不到全部分数。坐标约定： x 是台车重心相对地面的位置， y 是小球相对台车的位置（自然长处为原点，两者同向）。

(1) 台车固定时的振动周期 T_1

解答

台车被制动器固定，等价于弹簧的一端固定在惯性系中。小球只受弹簧的弹力 $-ky$ （台车与小球间无摩擦），故

$$m\ddot{y} = -ky, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

答 $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

解说

M 与 y_1 都不出现 台车固定时它不参与运动， M 无关；单振动的周期与振幅无关， y_1 也无关。题目写“从 M, m, k, y_1 中选取必要的”，正是要考生识别这一点。

水平弹簧不受重力影响 运动在水平面内，重力与地面反力都垂直于运动方向，不进入方程。若是竖直弹簧，重力只会平移平衡位置，周期同样不变。

与 (4) 的对比在于“谁被固定” 本问弹簧的一端相当于接在无限大的质量上；(4) 中那一端接在有限质量 M 上，等效质量变小，周期因而变短。

(2) 小球初次到达自然长处时的速度 v_1

解答

小球从 $y = y_1$ 静止释放，作振幅 $|y_1|$ 、角频率 $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ 的单振动，中心在 $y = 0$ 。到达中心时速率最大，为 $\omega_1|y_1|$ 。运动方向由 y_1 的符号决定：从 y_1 出发首先朝 $y = 0$ 运动，即速度与 y_1 反号。因此

$$v_1 = -\sqrt{\frac{k}{m}} y_1.$$

答 $v_1 = -\sqrt{\frac{k}{m}} y_1$ （速率为 $\sqrt{k/m}|y_1|$ ，方向朝自然长处）

解说

用能量守恒也能得到 $\frac{1}{2}ky_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2$ 给出 $|v_1| = \sqrt{k/m}|y_1|$ 。能量法只给大小，方向仍要另行判断。

写成带符号的式子更完整 $v_1 = -\sqrt{k/m}y_1$ 对 $y_1 > 0$ 与 $y_1 < 0$ 都成立。若只写正的速率，就没有回答“速度”这个矢量量。

“初次”二字的含义 小球每半个周期经过一次 $y = 0$ ，速度方向交替。题目问“初次”，故取从 y_1 出发的第一次，即与 y_1 反向的那一次。

(3) 松开制动器后两者的运动方程**解答**

弹簧的另一端固定在台车的壁上。小球相对台车的位置为 y 时，弹簧的伸长量为 y ，对小球的作用力为 $-ky$ ，对台车壁的作用力为其反作用力 $+ky$ 。

台车（在地面这一惯性系中，加速度 a_1 ）：水平方向只受弹簧的反作用力，

$$Ma_1 = ky.$$

小球（在台车参考系中，相对加速度 a_2 ）：受弹力 $-ky$ 与惯性力 $-ma_1$ ，

$$ma_2 = -ky - ma_1.$$

答 台车： $Ma_1 = ky$ 小球（台车系）： $ma_2 = -ky - ma_1$

解说

两式所用的参考系不同 题干指定 a_1 是“从地面看台车的加速度”、 a_2 是“从台车上看小球的加速度”，所以第一式在惯性系、第二式在非惯性系中写，后者必须加惯性力 $-ma_1$ 。

作用力与反作用力的符号 弹簧对小球是 $-ky$ 、对台车是 $+ky$ ，两者大小相等方向相反。若两式都写 $-ky$ ，把两式相加得不到“总动量守恒”的形式。

地面光滑，台车不受摩擦 题干说台车可以无摩擦地左右移动，故台车的水平方程里没有摩擦项。台车与小球之间也无摩擦，小球只受弹力。

相加即得动量守恒 把第一式与“小球在地面系的方程 $m(a_1 + a_2) = -ky$ ”相加得 $Ma_1 + m(a_1 + a_2) = 0$ ，即系统的总动量不变。(5) 与 (7) 都要用到这条结论。

(4) 周期 T_2 及其与 T_1 的比较**解答**

由 (3)， $a_1 = \frac{k}{M}y$ 。代入小球的方程：

$$ma_2 = -ky - m \cdot \frac{k}{M}y = -k \left(1 + \frac{m}{M}\right)y,$$

$$a_2 = -\frac{k(M+m)}{Mm}y.$$

这是标准的单振动方程, 角频率与周期为

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}.$$

与 T_1 比较:

$$T_2 = \sqrt{\frac{M}{M+m}} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{M}{M+m}} T_1.$$

因为 $\frac{M}{M+m} < 1$, 故 $T_2 < T_1$ 。

答 $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}} = \sqrt{\frac{M}{M+m}} T_1 < T_1$, 即比 T_1 短。

解说

约化质量的出现 $\frac{Mm}{M+m}$ 是两体问题的约化质量 μ , 且 $\mu < m$ 。振动的“有效质量”变小, 故周期变短。把结论记成 “ $T = 2\pi\sqrt{\mu/k}$ ”, 同类题可以直接套用。

比较必须给出理由 题目要求“与理由一起写出”。写出 $T_2 = \sqrt{M/(M+m)} T_1$ 这一形式, 比较就一目了然, 比代入具体数值更有说服力。

y_2 不出现 振幅不影响周期, 故 T_2 与 y_2 无关。这与 (1) 中 y_1 不出现是同一个理由。

极限检查 $M \rightarrow \infty$ 时 $T_2 \rightarrow T_1$: 台车极重相当于被固定, 回到 (1) 的情形。 $M \rightarrow 0$ 时 $T_2 \rightarrow 0$: 极轻的台车几乎瞬间被推开, 振动极快。

(5) 台车重心位置随时间变化的图像

解答

系统初始整体静止, 水平方向无外力, 故总动量恒为零:

$$M\dot{x} + m(\dot{x} + \dot{y}) = 0 \implies (M+m)\dot{x} = -m\dot{y}.$$

积分一次: $(M+m)x = -my + \text{常数}$, 即

$$x = -\frac{m}{M+m}y + C.$$

题设 $M = 3m$, 故 $\frac{m}{M+m} = \frac{1}{4}$ 。又 $y = A\cos\omega t$, 且 $t = 0$ 时 $x = 0$ 、 $y = A$, 代入定出 $C = \frac{A}{4}$ 。因此

$$x = \frac{A}{4}(1 - \cos\omega t).$$

这是振幅 $\frac{A}{4}$ 、以 $\frac{A}{4}$ 为中心的余弦振动: x 在 0 与 $\frac{A}{2}$ 之间变化, 恒为非负, 且 $t = 0$ 时从 0 出发。周期为 T_2 。符合这一描述的是 (力)。

答 (力)。理由: 台车与小球的水平动量守恒, 故 $x = -\frac{m}{M+m}y + C$; 代入 $M = 3m$ 与初始条件得

$x = \frac{A}{4}(1 - \cos\omega t)$, 即在 0 到 $\frac{A}{2}$ 之间、以 T_2 为周期的非负振动。

解说

三个特征一起来排除 振幅 $\frac{A}{4}$ (不是 A 或 $2A$)、最小值为 0 (不取负值)、 $t = 0$ 时从最小值出发 (不是从最大值)。三条同时满足的只有一个选项, 任何一条判错都会选到别的图。

x 与 y 反号 动量守恒给出的比例系数为负: 小球向右时台车向左。但因为常数 C 的存在, x 整体被平移到非负区域, 图像才落在横轴上方。

$M = 3m$ 这个条件只用在系数上 $\frac{m}{M+m} = \frac{m}{4m} = \frac{1}{4}$ 。若改成 $M = m$, 系数变成 $\frac{1}{2}$, 振幅就是 $\frac{A}{2}$, 答案随之改变。

周期与小球相同 台车与小球通过同一根弹簧耦合, 只有一个振动模式, 故两者周期都是 T_2 。图中横轴以 T_2 、 $2T_2$ 标刻, 正是提示这一点。

(6) 小球静止时的位置 y_3 **解答**

台车被外力拖着以恒定加速度 α (沿 x 轴正方向) 运动, 小球相对台车静止。在台车参考系中, 小球受弹力 $-ky_3$ 与惯性力 $-m\alpha$ (与 α 反向), 二者平衡:

$$-ky_3 - m\alpha = 0, \quad y_3 = -\frac{m\alpha}{k}.$$

答 $y_3 = -\frac{m\alpha}{k}$ (在自然长位置的负方向一侧)

解说

负号的物理含义 台车向 $+x$ 加速, 惯性力把小球推向 $-y$, 弹簧被压缩, 故平衡位置在自然长的负方向一侧。符号必须保留。

M 与 t_1 都不出现 平衡只由小球自身的质量、弹簧劲度和加速度决定。题目给出的 M 与 t_1 是为 (7) 准备的干扰项。

与 (1)(4) 的区别 本问不是振动而是相对静止的平衡问题, 所以用力的平衡而不是运动方程。惯性力是唯一需要额外加入的项。

(7) 撤去外力后台车重心位置的图像**解答**

在 $t = t_1$ 之前, 台车与小球一起以加速度 α 运动, 两者速度都是 αt_1 。 $t = t_1$ 撤去外力后, 系统水平方向不再受外力, 总动量守恒且不为零:

$$(M+m)v_G = (M+m)\alpha t_1 \implies v_G = \alpha t_1 \text{ (常数)},$$

即系统质心此后作匀速直线运动。另一方面, t_1 时小球位于 $y_3 = -\frac{m\alpha}{k} \neq 0$ 且相对台车静止, 故此小球相对台车作以 $y = 0$ 为中心、振幅 $\frac{m\alpha}{k}$ 、周期 T_2 的单振动。

台车的位置由质心的匀速运动减去小球的相对振动贡献给出:

$$x = (\text{与} t \text{成正比的项}) - \frac{m}{M+m} y(t),$$

即“整体向正方向匀速平移”上叠加一个周期振动。又 $t = t_1$ 时弹簧被压缩 ($y_3 < 0$)，对台车的作用力为 $ky_3 = -m\alpha < 0$ ，台车先受到负方向的力而减速。符合“总体上升、叠加振荡、且起始处斜率先变小”的是 (イ)。

答 (イ)。理由：撤去外力后系统质心作匀速直线运动，小球相对台车作单振动，故台车位置 = 匀速平移 + 周期振荡；且 t_1 时弹簧压缩，对台车施加负方向的力，台车先减速。

解说

与 (5) 的差别在于总动量不为零 (5) 中系统初始静止， x 只有振荡、没有漂移；本问 t_1 时整体已有速度 αt_1 ，故图像必须是“上升趋势 + 振荡”。只振荡不上升的 (エ)、只上升不振荡的 (ウ) 都不对。

起点的斜率变化决定选 (イ) 还是 (ア) t_1 瞬间弹簧处于压缩状态，把台车往负方向推，故台车先减速。图像在起点处应先向下弯。这一句是本问评分的关键，不能只写记号。

振荡的周期仍是 T_2 撤去外力后系统与 (4) 完全相同，只是整体附加了一个匀速平移。在随质心运动的参考系中看，就是 (4) 的振动。

振幅可以算出来 台车振荡部分的振幅为 $\frac{m}{M+m} \cdot \frac{m\alpha}{k}$ 。题目只要求选图与理由，不必写出这个值，但知道它有助于排除振幅明显过大的选项。