

第2题 2025年度第2题：抛物线切线与扫过区域

先把切线写成参数 a 的显式方程，再用完全平方求交点。最后一问不是计算单个 D_a ，而是求 $0 \leq a \leq 2$ 时所有 D_a 的并集；上边界要按 x 的位置分段取包络。

对应 2025 年度官方问题册：第 1 页 (PDF 页码)。请与原题对照阅读。

问1 切线方程与两个交点

解答

曲线 $C_2: y = x^2 + 4$ 的导数为 $2x$ ，故在 $(a, a^2 + 4)$ 处的切线斜率为 $2a$ 。因此

$$\ell: y - (a^2 + 4) = 2a(x - a),$$

即

$$\ell: y = 2ax - a^2 + 4.$$

与 $C_1: y = x^2$ 联立，得到

$$x^2 = 2ax - a^2 + 4 \iff (x - a)^2 = 4.$$

所以两个横坐标为 $a - 2$ 、 $a + 2$ ，纵坐标分别由 $y = x^2$ 给出。

答 $\ell: y = 2ax - a^2 + 4$ ；交点为 $(a - 2, (a - 2)^2)$ 与 $(a + 2, (a + 2)^2)$ 。

解说

完全平方同时给出几何信息 等式 $(x - a)^2 = 4$ 说明两交点关于 $x = a$ 对称，横向距离都为 2。因此无论 a 为何值，切线与 C_1 总有两个不同交点。

不要把 C_2 的切线当成 C_1 的切线 ℓ 在 C_2 上的切点横坐标为 a ，但它与 C_1 相交于 $a \pm 2$ 。后续求垂直条件时，应使用 C_1 在这两个交点处的斜率。

代回检查 把 $x = a \pm 2$ 代入直线，得到 $y = a^2 \pm 4a + 4 = (a \pm 2)^2$ ，与抛物线纵坐标一致。

问2 交点处切线与 ℓ 垂直

解答

ℓ 的斜率为 $2a$ 。 C_1 在横坐标 $a + 2$ 处的切线斜率为 $2(a + 2)$ ，垂直条件为

$$2a \cdot 2(a + 2) = -1.$$

于是

$$4a^2 + 8a + 1 = 0, \quad a = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

同理，在横坐标 $a - 2$ 处，

$$2a \cdot 2(a - 2) = -1,$$

所以

$$4a^2 - 8a + 1 = 0, \quad a = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

四个数互不相同，均应保留。

答 $a = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

解说

一条直线对应两个交点 题目说“问1求得的交点处”，因此两个交点都要检查。只处理 $a+2$ 或 $a-2$ 会漏掉一半答案。

垂直斜率的乘积 这里各斜率都是有限实数，故可用 $m_1 m_2 = -1$ 。当 $a=0$ 时 ℓ 为水平线，而 C_1 在交点处斜率为 ± 4 ，并不垂直，也没有被方程遗漏。

数值核对 四个解约为 $-1.866, -0.134, 0.134, 1.866$ 。代入相应的二次方程都成立，可用来检查根号前后的符号。

问3 所有 D_a 的并集与面积

解答

对固定 a ，直线与抛物线的高度差为

$$(2ax - a^2 + 4) - x^2 = 4 - (x - a)^2.$$

故

$$D_a = \{(x, y) : a - 2 \leq x \leq a + 2, x^2 \leq y \leq 2ax - a^2 + 4\}.$$

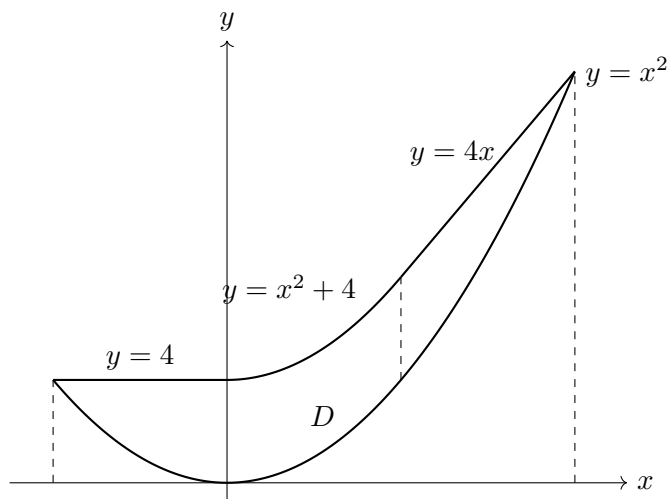
当 $0 \leq a \leq 2$ 时，横坐标的总范围为 $-2 \leq x \leq 4$ 。对固定 x ，上边界是

$$2ax - a^2 + 4 = x^2 + 4 - (a - x)^2$$

关于 $a \in [0, 2]$ 的最大值。也就是把 a 取为区间 $[0, 2]$ 中离 x 最近的点，因此

$$U(x) = \begin{cases} 4, & -2 \leq x \leq 0, \\ x^2 + 4, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4x, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

下边界始终为 $y = x^2$ 。



于是面积为

$$\begin{aligned}|D| &= \int_{-2}^0 (4 - x^2) dx + \int_0^2 4 dx + \int_2^4 (4x - x^2) dx \\ &= \frac{16}{3} + 8 + \frac{16}{3} = \frac{56}{3}.\end{aligned}$$

答 D 的下边界为 $y = x^2$ ，上边界为上述分段函数 $U(x)$ ；面积为 $\frac{56}{3}$ 。

解说

“动过的区域”是并集 不能把某个固定 a 的面积先求出再对 a 积分。对每个 x ，应在允许的 a 中选取最高的切线，得到所有 D_a 覆盖后的上包络。

最近点解释避免繁琐求导 $U(x) = x^2 + 4 - \min_{0 \leq a \leq 2} (a - x)^2$ 。当 $x < 0$ 时最近点为 0，当 $0 \leq x \leq 2$ 时为 x 本身，当 $x > 2$ 时为 2，三段边界随即确定。

边界衔接检查 在 $x = 0$ 处前两段都等于 4；在 $x = 2$ 处后两段都等于 8。端点 $x = -2, 4$ 处上、下边界相交，因此区域没有缺口。

面积的对称核对 左右两侧的两块面积均为 $16/3$ ，中间是高恒为 4、宽为 2 的带状区域，面积为 8。这给出 $56/3$ 的快速复核。

第 6 题 2026 年度第 2 题：复数反演下的圆与相切条件

变换 $w = A/z$ 是以原点为中心的反演并伴随共轭方向变化。直接把 $z = A/w$ 代回圆的模长方程，可以避免凭图猜测圆心；第二问再比较两圆的圆心距和半径。

对应 2026 年度官方问题册：第 1 页 (PDF 页码)。请与原题对照阅读。

问 1 求圆 C_A 的圆心与半径

解答

原圆为

$$|z - (2 + i)| = 2.$$

由于 $w = A/z$ ，有 $z = A/w$ 。代入并乘以 $|w|$ ，得到

$$|A - (2 + i)w| = 2|w|.$$

两边平方。记 $c = 2 + i$ ， $|c|^2 = 5$ ，则

$$A^2 - 2A \operatorname{Re}(cw) + 5|w|^2 = 4|w|^2.$$

整理并配成模长平方：

$$|w - A\bar{c}|^2 = 4A^2.$$

因此 C_A 的方程为

$$|w - A(2 - i)| = 2A.$$

答 C_A 的圆心为 $A(2 - i)$ ，即坐标 $(2A, -A)$ ；半径为 $2A$ 。

解说

为什么像仍是圆 原圆的圆心到原点的距离为 $\sqrt{5} > 2$ ，所以原圆不过原点。反演不会把它变成直线，代数整理也确实得到一个半径非零的圆。

圆心中的共轭符号 展开 $|w - A\bar{c}|^2$ 时，中间项是 $-2A \operatorname{Re}(cw)$ ，正好与上式一致。因此圆心是 $A\bar{c} = A(2 - i)$ ，不是 $A(2 + i)$ 。

半径正性 题设 $A > 0$ ，故半径 $2A$ 为正。若只写 $|2A|$ 虽数值无误，却没有利用题设，也会让后续分类显得多余。

问 2 C_A 与 C 相切时的 A

解答

C 与 C_A 的圆心坐标分别为 $(2, 1)$ 、 $(2A, -A)$ ，半径分别为 2 、 $2A$ 。圆心距满足

$$d^2 = (2A - 2)^2 + (-A - 1)^2 = 5A^2 - 6A + 5.$$

外切条件 $d = 2 + 2A$ 。两边平方得到

$$A^2 - 14A + 1 = 0,$$

因此

$$A = 7 \pm 4\sqrt{3}.$$

两根都为正，且代回未平方的外切条件仍成立。

再检查内切条件。它要求

$$d = 2|A - 1|.$$

平方并代入 d^2 后得到 $(A + 1)^2 = 0$ ，与 $A > 0$ 矛盾。因此没有额外解。特别地， $A = 1$ 时两圆圆心为 $(2, 1)$ 与 $(2, -1)$ ，半径都为 2，相交于两点，并不重合。

答 $A = 7 - 4\sqrt{3}$ 或 $A = 7 + 4\sqrt{3}$ 。

解说

不能把两个圆心当成同一直线上的点 C_A 的圆心含有共轭，纵坐标是 $-A$ 。因此圆心距不是 $\sqrt{5}|A - 1|$ ，必须从两组坐标直接计算。

平方后的根要回代 外切方程两边都非负，但二次方程的根仍应确认满足 $A > 0$ 。 $7 \pm 4\sqrt{3}$ 均为正，故两根都保留。

根式化简核对 两根的和为 14、积为 1，恰与 $A^2 - 14A + 1 = 0$ 的系数一致。这同时说明一根小于 1、另一根大于 1。

尺度关系 两答案的乘积为 1，可作为根式计算的独立检查。内切条件则只导出 $A = -1$ ，与题设冲突。

第 8 题 2026 年度第 4 题：三角形内切椭圆的最大面积

椭圆的轴与坐标轴平行。先把“与三条边相切”翻译成圆心到直线的椭圆型距离条件；两条斜边的对称性会迫使圆心落在 x 轴上，竖边条件再把 α 写成 a 。

对应 2026 年度官方问题册：第 2 页 (PDF 页码)。请与原题对照阅读。

问 1 用 a 表示圆心 (α, β)

解答

椭圆

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

与直线 $y = x$ 相切的条件是

$$|\beta - \alpha| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

与直线 $y = -x$ 相切的条件是

$$|\beta + \alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

两式平方相减，得到 $4\alpha\beta = 0$ 。椭圆位于三角形内部并与竖边 $x = 1$ 相切，故 $\alpha > 0$ ，于是 $\beta = 0$ 。

椭圆右端点与 $x = 1$ 相切，所以

$$\alpha + a = 1,$$

即

$$(\alpha, \beta) = (1 - a, 0).$$

此外，由斜边相切条件还得到

$$a^2 = a^2 + b^2, \quad b^2 = (1 - a)^2 - a^2 = 1 - 2a,$$

故参数范围为 $0 < a < 1/2$ 。

答 $(\alpha, \beta) = (1 - a, 0)$ ；并有 $b^2 = 1 - 2a$ 、 $0 < a < \frac{1}{2}$ 。

解说

相切条件的由来 把椭圆写成 $(x, y) = (\alpha + a \cos u, \beta + b \sin u)$ 。在线性式 $y - x$ 上，其振幅为 $\sqrt{a^2 + b^2}$ ；直线 $y = x$ 恰为支撑线时，圆心的代入值绝对值必须等于这一振幅。

为什么 $\beta = 0$ 三角形关于 x 轴对称，但不能只凭图直接断言圆心对称。两条斜边的相切方程平方后相减，才严格排除 $\beta \neq 0$ 。

竖边取右端点 三角形内部满足 $x \leq 1$ ，所以与 $x = 1$ 接触的是椭圆的最右点 $\alpha + a$ 。若误写 $\alpha - a = 1$ ，所得椭圆中心会跑到三角形右侧。

接点确在线段上 斜边接点的横坐标为 $b^2/\alpha = (1 - 2a)/(1 - a)$ 。在 $0 < a < 1/2$ 时它位于 $(0, 1)$ ，所以接触的是边 AB, AC 本身，而不是其延长线。

问 2 面积最大值及 a, b **解答**

由问 1, $b = \sqrt{1 - 2a}$, 椭圆面积为

$$S = \pi ab = \pi a \sqrt{1 - 2a}, \quad 0 < a < \frac{1}{2}.$$

由于 $S > 0$, 最大化 S 等价于最大化

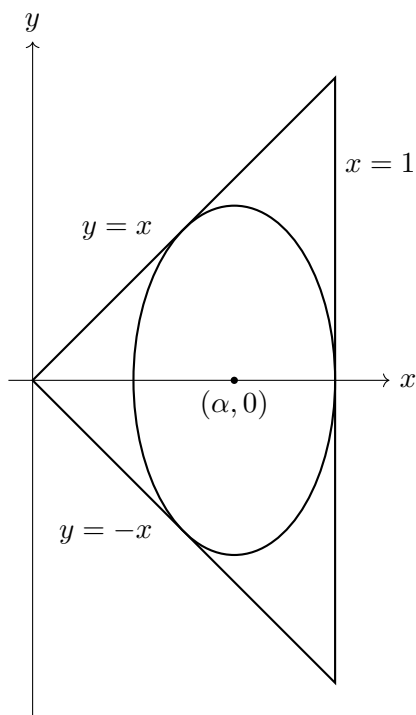
$$\frac{S^2}{\pi^2} = a^2(1 - 2a).$$

求导得

$$\frac{d}{da}[a^2(1 - 2a)] = 2a(1 - 3a).$$

在区间 $(0, 1/2)$ 内唯一驻点为 $a = 1/3$ 。函数在其左侧递增、右侧递减, 且两端极限为 0, 所以该点给出全局最大值。此时

$$b = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad S_{\max} = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$



答 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时面积最大, 最大值为 $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ 。

解说

平方后再求导 S 含平方根, 而 $S > 0$, 所以比较 S^2 不会改变最大点。这样导数变成简单多项式, 也减少链式法则错误。

半轴大小无需排序 题式中的 a, b 分别是水平、竖直半轴, 并未规定 $a \geq b$ 。最优点满足 $b = 1/\sqrt{3} > a = 1/3$, 与题图的纵向椭圆一致。

切触关系复核 最优点有 $\alpha = 2/3$, $\alpha^2 = a^2 + b^2 = 4/9$, $\alpha + a = 1$, 三条边的相切条件全部满足。