

第3题 2024 年度：带电粒子的运动

对应官方问题册物理第6题。第(1)问依次使用匀加速运动、洛伦兹力提供向心力及圆弧几何；第(2)问须同时使用能量守恒与动量守恒。电荷为负时，受力方向与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 相反。

第6题 (1) -1 加速区内的运动

解答

电荷量的大小为 q 、质量为 m 。粒子从静止出发，经过电势差 V 后获得的动能为 qV ，所以

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV, \quad v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}.$$

若两板间距为 l ，电场大小为 V/l ，加速度大小为 $a = qV/(ml)$ 。由 $l = at^2/2$ 得

$$t = l\sqrt{\frac{m}{2qV}}.$$

答 $t = l\sqrt{\frac{m}{2qV}}, \quad v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}.$

解说

两种推导的对应 能量法最快得到末速度；再用 $l = (v/2)t$ 也可直接得到时间。两种方法互相检验。

第6题 (1) -2 磁场大小与方向

解答

粒子进入匀强磁场后速率不变，轨迹为半径 r 的圆弧。由图示几何，圆心到入射点和探测点的距离均为 r ，可得

$$r^2 = (r - d)^2 + l^2, \quad r = \frac{l^2 + d^2}{2d}.$$

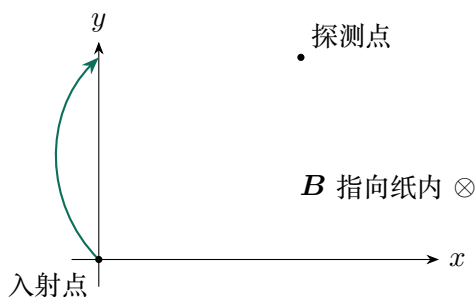
洛伦兹力提供向心力：

$$qvB = \frac{mv^2}{r}.$$

代入 $v = \sqrt{2qV/m}$ 与上述 r ，得到

$$B = \frac{2d}{l^2 + d^2} \sqrt{\frac{2mV}{q}}.$$

粒子带负电。按题图的初速度与弯曲方向判断，磁场应指向纸内，即 $-z$ 方向。



答 $B = \frac{2d}{l^2 + d^2} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$, 方向为 $-z$ (纸内)。

解说

几何是得分点 仅写 $r = mv/(qB)$ 还不足以消去 r 。必须从题图明确写出 $r^2 = (r-d)^2 + l^2$, 才能把可测的 l, d 与 B 联系起来。

方向检查 先对正电荷使用右手定则求 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, 再因粒子带负电把方向反转, 可避免凭图猜测磁场方向。

第6题 (1) -3 $d > l$ 时的磁场配置

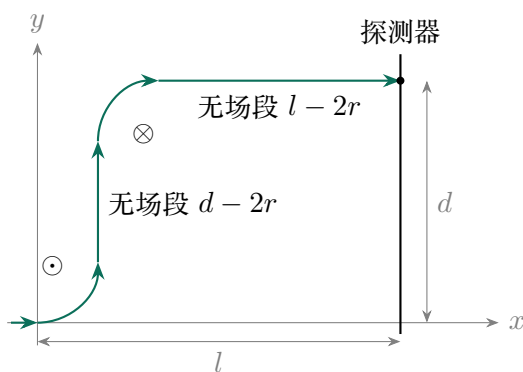
解答

把题图旋转后, 令粒子从原点沿 $+x$ 方向射出, 探测器位于直线 $x = l$, 目标点为 (l, d) 。可以使用两段弯曲方向相反的四分之一圆弧: 第一段磁场使粒子由 $+x$ 转为 $+y$, 经过一段竖直的无场区后, 第二段反向磁场再把粒子由 $+y$ 转回 $+x$, 最后沿水平方向到达目标点。

一种明确的构造是取半径 $r < l/2$, 使两个磁场区内的圆弧半径都为 r , 磁场大小取

$$B_r = \frac{mv}{qr}.$$

两段圆弧提供合计 $2r$ 的横向距离和 $2r$ 的纵向位移。两圆弧之间的竖直无场段长为 $d - 2r$, 第二圆弧之后的水平无场段长为 $l - 2r$ 。因 $d > l$ 且 $r < l/2$, 这两段长度都为正。



答 例如设置两段大小相同、方向相反的局域磁场, 以两段四分之一圆弧构成 S 形转向; 取 $r < l/2$ 、 $B_r = mv/(qr)$, 两圆弧间的无场段取 $d - 2r$, 末段取 $l - 2r$ 。

解说

作图要求 题目要求设计轨迹，答案应同时标出粒子前进方向、两磁场的相反方向及最终到达探测器的位置。只写“改变磁场”而没有可实现的轨迹，论证不完整。

第6题 (2) 库仑斥力下的速度**解答**

质量分别为 m, M ，电荷分别为 $-q, -Q$ 的两粒子最初静止、相距 a 。在静电斥力作用下远离至无穷远时，电势能全部转化为动能：

$$\frac{kqQ}{a} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2.$$

初始总动量为零，故末态两粒子的动量大小相等、方向相反：

$$mv = Mu, \quad u = \frac{m}{M}v.$$

代回能量式：

$$\frac{kqQ}{a} = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) = \frac{m(M+m)}{2M}v^2.$$

因此质量为 m 、电荷为 $-q$ 的粒子速度大小为

$$v = \sqrt{\frac{2kqQM}{am(M+m)}}.$$

答 $v = \sqrt{\frac{2kqQM}{am(M+m)}}.$

解说

极限检查 若 $M \gg m$ ，重粒子几乎不动，结果趋于 $v = \sqrt{2kqQ/(am)}$ ，即轻粒子获得几乎全部电势能，物理上合理。

第4题 2025年度：加速参考系中的弹簧振子

对应官方问题册物理第4题。以卡车为参考系时，质量为 m 的货物除受弹簧力外，还受到与卡车加速度反向的惯性力。先移动平衡位置，再把运动写成围绕新平衡点的简谐振动，可统一解决时间、初速度、功和图像四问。

第4题 (1) 振动中心的位置

解答

规定弹簧压缩方向为相对位移 X 的正方向。卡车以加速度 $-a_0$ 减速时，在卡车参考系中，货物受到沿 $+X$ 方向、大小为 ma_0 的惯性力；弹簧力为 $-kX$ 。运动方程为

$$m\ddot{X} = ma_0 - kX.$$

在振动中心处 $\ddot{X} = 0$ ，所以

$$X_0 = \frac{ma_0}{k}.$$

答 $X_0 = \frac{ma_0}{k}$ ，位于弹簧压缩方向。

解说

坐标平移 令 $Y = X - X_0$ ，则 $m\ddot{Y} = -kY$ 。因此角频率仍为 $\omega = \sqrt{k/m}$ ；恒定惯性力只移动平衡位置，不改变周期。

第4题 (2) -1 卡车停止所需时间

解答

此问卡车的减速度大小为 a ，初始时 $X(0) = 0$ 、 $\dot{X}(0) = 0$ 。由

$$m\ddot{X} = ma - kX, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

得到满足初始条件的解

$$X(t) = \frac{ma}{k}(1 - \cos \omega t).$$

弹簧第一次达到最大压缩时 $\cos \omega t = -1$ ，即 $\omega t = \pi$ 。题设说明此时卡车恰好停止，故

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

答 $T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ 。

解说

为何是半个周期 X 从 0 出发，而新的平衡位置为 ma/k ；第一次最大压缩为 $X = 2ma/k$ 。从平衡点一侧的端点到另一侧端点正好经历半个周期。

第4题 (2) -2 制动前的卡车速度**解答**

卡车以恒定减速度 a 在时间 T 内从初速度 u_0 降到零，因此

$$0 = u_0 - aT.$$

代入上一问的 T ：

$$u_0 = aT = \pi a \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

答 $u_0 = \pi a \sqrt{\frac{m}{k}}.$

解说

量纲检查 $\sqrt{m/k}$ 的量纲是时间，与 a 相乘后得到速度。

第4题 (2) -3 货物和弹簧对卡车所做的功**解答**

在制动开始前，货物随卡车以 u_0 运动，弹簧既不伸长也不压缩。因此货物与弹簧系统的初始机械能为

$$E_i = \frac{1}{2} m u_0^2.$$

卡车停止时，货物相对卡车也瞬时静止，且弹簧第一次达到最大压缩

$$X_{\max} = \frac{2ma}{k}.$$

此时系统的机械能仅为弹簧势能

$$E_f = \frac{1}{2} k X_{\max}^2 = \frac{2m^2 a^2}{k}.$$

货物和弹簧对卡车做的功等于该系统机械能的减少量。代入 $u_0 = \pi a \sqrt{m/k}$ ，有

$$W = E_i - E_f = \frac{m^2 a^2}{k} \left(\frac{\pi^2}{2} - 2 \right).$$

答 $W = \frac{m^2 a^2}{k} \left(\frac{\pi^2}{2} - 2 \right).$

解说

正负检查 $\pi^2/2 - 2 > 0$ ，所以货物和弹簧总体上对仍在向前运动的卡车做正功。相反，卡车对“货物 + 弹簧”系统所做的净功为 $E_f - E_i < 0$ 。

第4题 (2) -4 从制动开始到第二次最大压缩的图像

解答

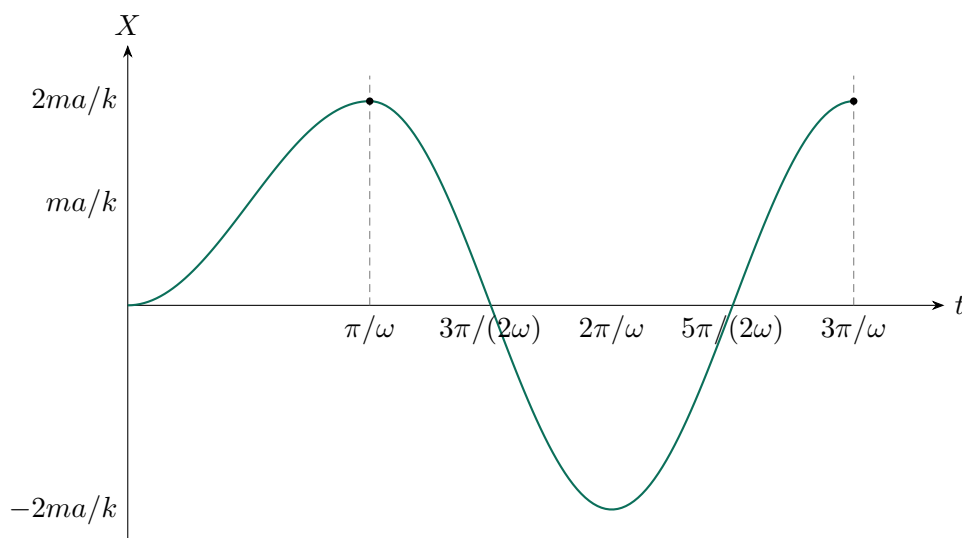
记 $\omega = \sqrt{k/m}$ 、 $T = \pi/\omega$ 。卡车停止前，由上文

$$X(t) = \frac{ma}{k}(1 - \cos \omega t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

在 $t = T$ 时， $X = 2ma/k$ 、 $\dot{X} = 0$ 。卡车停止后惯性力消失，货物围绕 $X = 0$ 作简谐振动，故

$$X(t) = \frac{2ma}{k} \cos[\omega(t - T)], \quad T \leq t \leq 3T.$$

第二次最大压缩发生在 $t = 3T = 3\pi/\omega$ 。



答 $X = \frac{ma}{k}(1 - \cos \omega t)$ ($0 \leq t \leq \pi/\omega$)，随后 $X = \frac{2ma}{k} \cos[\omega(t - \pi/\omega)]$ ($\pi/\omega \leq t \leq 3\pi/\omega$)。

解说

图像连接 在 $t = T$ 处两段函数的位移均为 $2ma/k$ ，速度也均为零，曲线应平滑相接。卡车停止后振幅关于 $X = 0$ 对称，不能继续围绕 ma/k 振动。