

第 5 题 2025 年度第 2 题：球面切线的轨迹

本题把“直线与球面只有一个公共点”翻译为点到直线的距离等于半径。所得轨迹随参数 a 依次出现双曲线、抛物线与椭圆，最后再从方程的符号判断是否进入负 x 区域。

问 1 球面方程与直线参数式

解答

球面 S 以 $A = (1, 0, 1)$ 为球心、半径为 1，故

$$(X - 1)^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 = 1.$$

对 $Q = (x, y, 0)$ ，点 R 满足

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BQ}.$$

因为 $B = (0, 0, a)$ 、 $\overrightarrow{BQ} = (x, y, -a)$ ，所以

$$R = (tx, ty, a(1 - t)).$$

答 $S : (X - 1)^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 = 1$; $R = (tx, ty, a(1 - t))$ 。

解说

坐标的区分 球面上的一般点使用 (X, Y, Z) ，平面上的点 Q 使用 $(x, y, 0)$ ，可避免把轨迹变量与球面变量混在一起。

问 2 求轨迹 F 的方程

解答

直线 BQ 与球面相切，当且仅当球心 A 到直线 BQ 的距离等于 1。取

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{BA} = (1, 0, 1 - a), \quad \mathbf{w} = \overrightarrow{BQ} = (x, y, -a).$$

距离公式给出

$$\frac{|\mathbf{d} \times \mathbf{w}|^2}{|\mathbf{w}|^2} = 1.$$

其中

$$\mathbf{d} \times \mathbf{w} = (-(1 - a)y, (1 - a)x + a, y).$$

展开并整理

$$|\mathbf{d} \times \mathbf{w}|^2 - |\mathbf{w}|^2 = 0$$

可得

$$a(a - 2)x^2 - 2a(a - 1)x + (a - 1)^2y^2 = 0.$$

整体乘以 -1 后写成

$$a(2 - a)x^2 + 2a(a - 1)x - (a - 1)^2y^2 = 0.$$

答 $F: a(2-a)x^2 + 2a(a-1)x - (a-1)^2y^2 = 0$ 。

解说

为何等于半径 与球面有且仅有一个公共点即相切。球心到直线的距离小于1时有两个交点，大于1时没有交点。

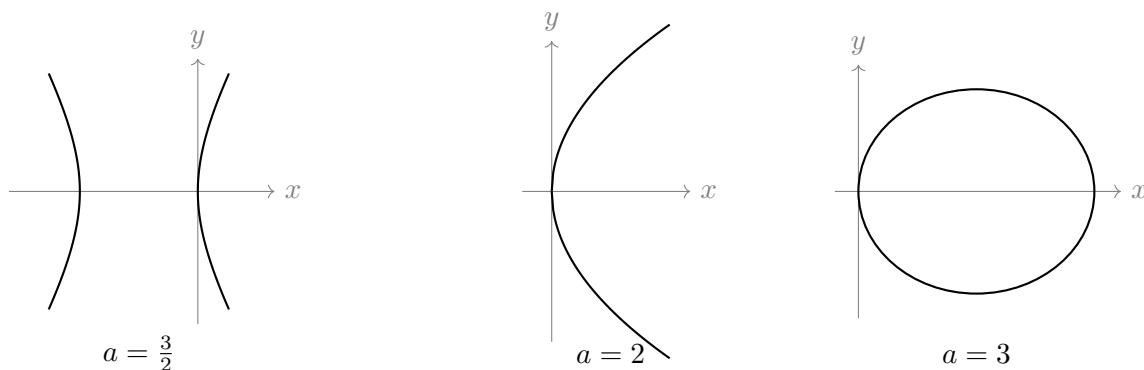
退化点 $Q = B$ 不可能发生，因为 $a > 1$ 且 Q 在 xy 平面，故 $|w| > 0$ ，距离公式的分母不会为零。

问3 画出三个参数值下的轨迹

解答

分别代入问2的方程并配方：

a	标准形	曲线
$\frac{3}{2}$	$3(x+1)^2 - y^2 = 3$	双曲线
$\frac{2}{2}$	$y^2 = 4x$	抛物线
3	$3(x-2)^2 + 4y^2 = 12$	椭圆



答 如图： $a = 3/2$ 时为中心 $(-1, 0)$ 的双曲线； $a = 2$ 时为向右开口的抛物线； $a = 3$ 时为中心 $(2, 0)$ 的椭圆。

解说

图中必须体现的量 双曲线的中心和平移方向、抛物线的开口方向、椭圆的中心与两条半轴都可由标准形直接读出。

问4 求轨迹不含负横坐标点的参数范围

解答

由轨迹方程，

$$y^2 = \frac{x\{a(2-a)x + 2a(a-1)\}}{(a-1)^2}.$$

分母为正。当 $1 < a < 2$ 时， $a(2-a) > 0$ ；取绝对值充分大的负 x ，花括号内也为负，于是右边为正，轨迹上存在 $x < 0$ 的点。

当 $a = 2$ 时，方程为 $y^2 = 4x$ ，所以 $x \geq 0$ 。当 $a > 2$ 且 $x < 0$ 时，

$$a(2-a)x > 0, \quad 2a(a-1) > 0,$$

故花括号为正，与外面的 $x < 0$ 相乘后为负，不可能等于 y^2 。因此所求为 $a \geq 2$ 。

答 $a \geq 2$ 。

解说

端点要保留 $a = 2$ 时二次项消失，但轨迹并未消失，而是成为抛物线 $y^2 = 4x$ ；它正好满足条件。

第9题 2026年度第3题：二次函数、区域与充分条件

本题先用直线与抛物线的交点画出联立不等式的区域，再把“条件 A 是条件 B 的充分条件”准确翻译成集合包含关系。后两问都需要按 a 的正负处理绝对值。

问1 求直线与抛物线的交点

解答

令 $g(x) = 2x$ ，则

$$x^2 - 3x - 6 = 2x \iff x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6) = 0.$$

故交点为 $(-1, -2)$ 和 $(6, 12)$ 。

令 $g(x) = -2x$ ，则

$$x^2 - 3x - 6 = -2x \iff x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) = 0.$$

故交点为 $(-2, 4)$ 和 $(3, -6)$ 。

答 $y = 2x$ 时为 $(-1, -2), (6, 12)$ ； $y = -2x$ 时为 $(-2, 4), (3, -6)$ 。

解说

坐标要完整 解出横坐标后仍需代回对应直线求纵坐标。两条直线各有两个交点，不能只列四个 x 值。

问2 图示联立不等式的区域

解答

由 $y^2 \geq 4x^2$,

$$y \geq 2|x| \quad \text{或} \quad y \leq -2|x|.$$

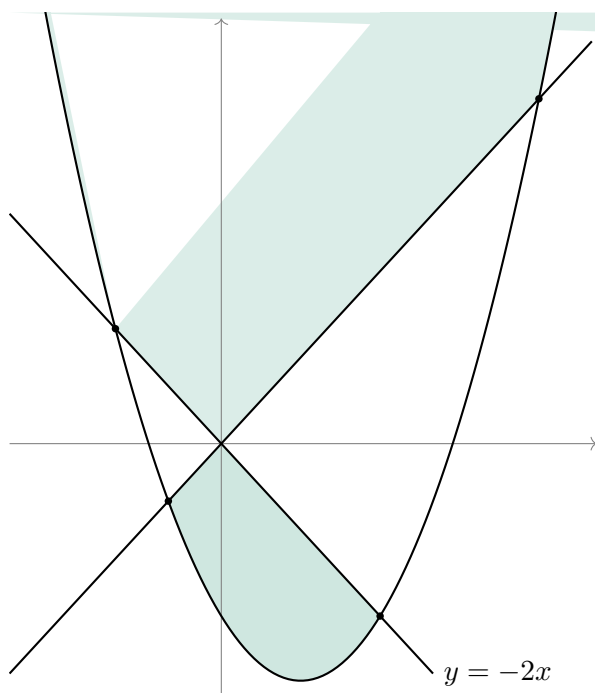
还要同时满足 $y \geq g(x)$ 。因此上方区域为

$$y \geq \max\{g(x), 2|x|\};$$

下方区域只有在 $g(x) \leq -2|x|$ 时存在，即

$$\begin{cases} g(x) \leq y \leq 2x, & -1 \leq x \leq 0, \\ g(x) \leq y \leq -2x, & 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

边界交点使用问1的四点。



答 上图阴影部分（边界均包含）：上方为 $y \geq \max\{g(x), 2|x|\}$ ，另有 $-1 \leq x \leq 3$ 内夹在抛物线与 $y = -2|x|$ 之间的下方部分。

解说

区域并非只有上方 从 $y^2 \geq 4x^2$ 只取 $y \geq 2|x|$ 会漏掉下锥形分支。第二个不等式会切掉其中大部分，但在 $-1 \leq x \leq 3$ 仍留下有界区域。

问3 判断一个条件是否为充分条件

解答

$f(x) \leq 9$ 等价于

$$4x^2 \leq 9 \iff -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

$g(x)$ 是开口向上的二次函数，所以它在该闭区间的最大值出现在端点。计算

$$g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{33}{4}.$$

两者都不超过 3，故区间内处处有 $g(x) \leq 3$ 。因此前一条件能够推出后一条件。

答 是充分条件。因为 $f(x) \leq 9 \implies -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \implies g(x) \leq 3$ 。

解说

无需证明反向 “充分条件”只要求从 $f(x) \leq 9$ 推出 $g(x) \leq 3$ 。反向不成立也不影响本问判断。

问4 求 $f(x) \leq a^2$ 能推出 $g(x) \leq a$ 的 a

解答

前件等价于 $|x| \leq |a|/2$ 。在对称区间

$$-\frac{|a|}{2} \leq x \leq \frac{|a|}{2}$$

上，开口向上的 $g(x)$ 的最大值出现在端点；且左端点的值较大。因此充分条件成立当且仅当

$$g\left(-\frac{|a|}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{3|a|}{2} - 6 \leq a.$$

当 $a \geq 0$ 时，这化为

$$a^2 + 2a - 24 \leq 0,$$

结合 $a \geq 0$ 得 $0 \leq a \leq 4$ 。当 $a < 0$ 时，这化为

$$a^2 - 10a - 24 \leq 0,$$

结合 $a < 0$ 得 $-2 \leq a < 0$ 。合并两种情形即可。

答 $-2 \leq a \leq 4$ 。

解说

为何看最大值 要让区间中的所有 x 都满足 $g(x) \leq a$ ，必须且只需该区间上 g 的最大值不超过 a 。

问5 求 $f(x) \geq a^2$ 能推出 $g(x) \geq a$ 的 a

解答

前件等价于 $|x| \geq |a|/2$ 。若 $|a| \leq 3$ ，右侧区间含有抛物线顶点 $x = 3/2$ ，而

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{33}{4} < a$$

(此时 $a \geq -3$)，所以不可能成立。

以下设 $|a| > 3$ 。在两条射线 $x \leq -|a|/2$ 或 $x \geq |a|/2$ 上， g 的最小值出现在右侧端点 $x = |a|/2$ 。故条件等价于

$$\frac{a^2}{4} - \frac{3|a|}{2} - 6 \geq a.$$

当 $a > 3$ 时，

$$a^2 - 10a - 24 \geq 0,$$

结合 $a > 3$ 得 $a \geq 12$ 。当 $a < -3$ 时，

$$a^2 + 2a - 24 \geq 0,$$

结合 $a < -3$ 得 $a \leq -6$ 。

答 $a \leq -6$ 或 $a \geq 12$ 。

解说

外侧区间的最小值 本问考察的是两条无界射线。抛物线向上，所以远处函数值增大；真正需要检查的是最靠近原点的允许点以及顶点是否被包含。