

第2题 2024年度第2题：抛物线、平行切线与面积

先用配方法确定最低点，再利用斜率相等写出直线。面积计算时，直线在上、抛物线在下，交点关于最低点的 x 坐标对称。

问1 最低点 A 的坐标

解答

因 $a \geq b > 0$ ，特别有 $a > 0$ 。配方得

$$f(x) = ax^2 + bx = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a}.$$

故纵坐标在 $x = -b/(2a)$ 时最小。

答 $A \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} \right)$ 。

解说

配方的作用 配方同时给出横坐标和最小纵坐标，也明确说明 $a > 0$ 为何必要。

问2 求直线 ℓ

解答

曲线在原点处的切线斜率为 $f'(0) = b$ 。因此，过 A 且与该切线平行的直线满足

$$y + \frac{b^2}{4a} = b \left(x + \frac{b}{2a} \right),$$

整理得

$$y = bx + \frac{b^2}{4a}.$$

答 $\ell : y = bx + \frac{b^2}{4a}$ 。

解说

平行条件 平行只决定斜率为 b ，仍须代入点 A 确定截距；不能直接把原点切线当作 ℓ 。

问3 求围成图形的面积

解答

直线与抛物线的交点满足

$$ax^2 + bx = bx + \frac{b^2}{4a},$$

即 $x = \pm b/(2a)$ 。在两交点之间，直线与抛物线的纵坐标之差为

$$\frac{b^2}{4a} - ax^2.$$

故面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-b/(2a)}^{b/(2a)} \left(\frac{b^2}{4a} - ax^2 \right) dx \\ &= 2 \left[\frac{b^2}{4a}x - \frac{a}{3}x^3 \right]_0^{b/(2a)} = \frac{b^3}{6a^2}. \end{aligned}$$

答 $S = \frac{b^3}{6a^2}$ 。

解说

条件 $a \geq b > 0$ 的作用 本题只需用到 $a > 0$ 和 $b > 0$ ：前者保证抛物线开口向上，后者使积分上下限的次序明确。

检算 b^3/a^2 的量纲与“横坐标乘纵坐标”一致，并且在 $a, b > 0$ 时面积为正。

第7题 2025年度第2题：抛物线切线与面积级数

交点 Q_n 的横坐标已固定为 a_n ，因此先写切线，再令 $y = 0$ 即可得到递推式。三角形面积随 $a_n - 1$ 的三次方缩小，最后化为等比级数。

问1 求 Q_n 处的切线

解答

抛物线 $C: y = (x - 1)^2$ 在 $x = a_n$ 处的点为

$$Q_n(a_n, (a_n - 1)^2),$$

导数为 $y' = 2(x - 1)$ 。故切线为

$$y - (a_n - 1)^2 = 2(a_n - 1)(x - a_n).$$

答 $y = 2(a_n - 1)(x - a_n) + (a_n - 1)^2$ 。

解说

切点必须代入 只写斜率 $2(a_n - 1)$ 还不能确定直线；点斜式同时保留了切点坐标。

问2 用 a_n 表示 S_n

解答

在切线式中令 $y = 0$ ，得到它与 x 轴的交点横坐标

$$a_{n+1} = a_n - \frac{(a_n - 1)^2}{2(a_n - 1)} = \frac{a_n + 1}{2}.$$

由于 $a_1 = 2$ 且该递推式保持 $a_n > 1$ ，底边长度为

$$P_n P_{n+1} = a_n - a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}.$$

高为 $(a_n - 1)^2$ ，所以

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n - 1}{2} \cdot (a_n - 1)^2 = \frac{(a_n - 1)^3}{4}.$$

答 $S_n = \frac{(a_n - 1)^3}{4}$ 。

解说

底和高 两底点都在 x 轴上，故底边是横坐标之差，高就是 Q_n 的纵坐标。

问3 求 a_n 的通项**解答**

由

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1), \quad a_1 - 1 = 1,$$

可知 $\{a_n - 1\}$ 是公比为 $1/2$ 的等比数列。因此

$$a_n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

答 $a_n = 1 + \frac{1}{2^{n-1}}$ 。**解说****初项检查** 代入 $n = 1$ 得 $a_1 = 2$ ，与题设一致；指数若写成 n 便会在初项处暴露错误。**问4 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k$** **解答**

代入通项，

$$S_k = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{k-1}} \right)^3.$$

这是首项 $1/4$ 、公比 $1/8$ 的等比数列。故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k = \frac{1/4}{1 - 1/8} = \frac{2}{7}.$$

答 $\frac{2}{7}$ 。**解说****除以 $a_n - 1$ 之前** 应先由 $a_1 = 2$ 和递推关系确认 $a_n > 1$ ，否则从切线求 x 轴交点时不能无条件约去 $a_n - 1$ 。**面积为何是三次方** 底边正比于 $a_n - 1$ ，高正比于 $(a_n - 1)^2$ ，相乘后自然得到三次方。

第 15 题 2026 年度第 5 题：圆与直线的位置关系

配方后可直接读出圆心和半径。相切或相交条件都可以统一为“圆心到直线的距离与半径比较”，这样不用逐次联立二次方程。

问 1 求圆心与半径

解答

将圆的方程配方：

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0 \iff (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

答 圆心为 $(2, 3)$ ，半径为 2。

解说

常数项检查 配方补入 4 和 9 后，右端为 4，所以半径是 2 而不是 4。

问 2 $a = 3/4$ 时求相切的 b

解答

直线 $y = 3x/4 + b$ 写成

$$3x - 4y + 4b = 0.$$

相切时，圆心 $(2, 3)$ 到直线的距离等于半径 2：

$$\frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 4b|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2.$$

即

$$|4b - 6| = 10.$$

所以 $4b - 6 = \pm 10$ ，得到 $b = 4$ 或 $b = -1$ 。

答 $b = -1, 4$ 。

解说

两条切线 绝对值方程给出两个 b ，对应斜率相同、分居圆两侧的两条平行切线。

问 3 $b = 0$ 时求有两个不同交点的条件

解答

此时直线为 $ax - y = 0$ 。要与圆有两个不同交点，圆心到直线的距离必须严格小于半径：

$$\frac{|2a - 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} < 2.$$

两边均非负，可以平方：

$$(2a - 3)^2 < 4(a^2 + 1).$$

展开并约去 $4a^2$ ，

$$-12a + 9 < 4 \iff a > \frac{5}{12}.$$

答 $a > \frac{5}{12}$ 。

解说

为何是严格小于 距离等于半径时只有一个切点；距离大于半径时无交点。题目要求两个不同的公共点，所以必须用 $<$ 。

平方的合法性 距离式两边均非负，平方不会改变解集。若从一般不等式直接平方，应先说明符号条件。