数学

情報系院試　ロードマップシリーズ

6か月ロードマップと類題100問

東京大学大学院 情報理工学系研究科 一般教育科目（数学）

ロードマップ

第1章　試験の構成と出題マップ
第2章　1月から7月までの計画
第3章　線形代数（第1問対策）
第4章　微分積分と微分方程式（第2問対策）
第5章　確率（第3問対策）
第6章　仕上げの模擬セット

2027年 夏入試向け

出題マップ 2022–2026・月別計画・類題100問

院試 hub

利用上の注意

本書は院試 hub が独自に作成した基礎ノートと練習問題です。大学・研究科等の公式資料ではありません。各大学の過去問の本文・原図は収録していません。出題分野の頻度は、院試 hub が解答を公開している実施回の分類に基づきます。本書の無断転載、再配布、共有を禁じます。

目次

出題分野の頻度 7

第 1 章　試験の構成と出題マップ 8

一般教育科目（数学）の形式 8

2022〜2026 年度の出題分野 9

本書の使い方 10

第 2 章　1 月から 7 月までの計画 11

計画の前提 11

月ごとの進め方 12

第 3 章　線形代数（第 1 問対策） 13

実対称行列の対角化と正定値性 13

直交射影・鏡映・最小二乗 14

行列式の使いどころ 15

行列の指数関数・特異値分解・極分解 15

問題 1　重複固有値をもつ 3 次対称行列の直交対角化 16

問題 2　二次形式の正定値判定と標準形 17

問題 3　平面への直交射影行列 18

問題 4　鏡映行列の性質と点の鏡像 19

問題 5　点と平面・点と直線の距離 20

問題 6　4 次ヴァンデルモンド行列式の因数分解 21

出題分野の頻度

院試 hub が解答を公開している実施回を分類した問数。同じ大問が複数の分野に数えられることがある。

分野	問数	出題年度
期待値・分散・相関	4	2026、2024、2023、2022
行列式（面積・Vandermonde・正則条件）	4	2025、2024、2023、2022
固有値・固有ベクトル（実対称行列）	3	2026、2025、2022
正定値行列・二次形式	3	2026、2024、2022
1 階常微分方程式（変数分離・同次形・線形）	3	2026、2025、2023
直線・平面のベクトル表示	2	2025、2024
直交射影・鏡映・最小二乗	2	2025、2024
Riccati 型と変数変換による線形化	2	2026、2023
連立線形微分方程式	2	2025、2023
広義積分・パラメータを含む積分	2	2024、2022
ランダムウォーク・停止時刻	2	2026、2024
確率漸化式・特性方程式	2	2025、2023
待ち時間・幾何分布・確率母関数	2	2024、2023
補間多項式	1	2023
周期係数の微分方程式・解の軌道	1	2025
ガンマ関数	1	2024
一様収束と極限・積分の交換	1	2022
確率の不等式（Markov・Chebyshev・指数モーメント）	1	2026
連続分布の変換・最小値の分布	1	2022

(2) の代入で $a(y_1+v)^2$ を $ay_1^2+av^2$ と展開し、交差項 $2ay_1v$ を落とす誤りが多い。すると (3) で $v'=v^2+(1-2x)v$ となり、係数が定数にならないので以後の計算が進まない。

問題 55　周期係数の上三角連立方程式と解軌道

東大情報理工 2025 年度 第 2 問と同じ分野

問題

連続関数 $c(t)$ は周期 2π をもつとし、連立方程式

$$x'=(\cos t)\,x,\qquad y'=c(t)\,x+(\cos t)\,y$$

を初期値 $x(0)=x_0$、$y(0)=y_0$ で考える。$C(t)=\int_0^t c(s)\,ds$ とおく。

(1) $x(t)$ を求め、すべての x_0 で周期 2π をもつことを示せ。

(2) $y(t)$ を求めよ。

(3) $c(t)=\lambda+\cos t$（λ は定数）とする。解 (x,y) が周期 2π をもつための x_0,y_0,λ の条件を求めよ。

(4) $\lambda=0$、$x_0=1$、$y_0=0$ の解の軌道を xy 平面上の曲線として求め、時間とともにどう動くかを述べよ。

解答

(1)　$(e^{-\sin t}x)'=e^{-\sin t}(x'-x\cos t)=0$ より $x=x_0e^{\sin t}$。sin が周期 2π なので x も周期 2π（$\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=0$ に対応する）。

(2)　同じ積分因子で $(e^{-\sin t}y)'=e^{-\sin t}c(t)x=x_0c(t)$。積分して

答　$x=x_0e^{\sin t}$、$y=e^{\sin t}\bigl(y_0+x_0C(t)\bigr)$

(3)　$C(t)=\lambda t+\sin t$。x は常に周期的なので、y について調べる。c が周期的なので $C(t+2\pi)=C(t)+C(2\pi)$、$C(2\pi)=2\pi\lambda$ で、

$$y(t+2\pi)-y(t)=e^{\sin t}x_0\cdot 2\pi\lambda.$$

これがすべての t で 0 になるのは $x_0\lambda=0$ のときである。

答　$\lambda=0$ または $x_0=0$（y_0 は任意）

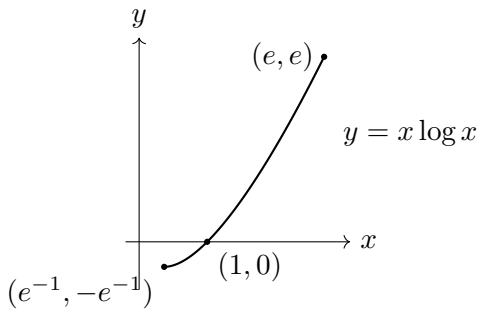
(4)　$x=e^{\sin t}$、$y=e^{\sin t}\sin t$ で、$\sin t=\log x$ と消去すると $y=x\log x$。$\sin t$ は $[-1,1]$ を動くので $x\in[e^{-1},e]$ である。$t=0$ で $(1,0)$ を出発し、$t=\pi/2$ で右端 (e,e) に達して引き返し、$t=3\pi/2$ で左端 $(e^{-1},-e^{-1})$ に達して再び引き返す。

答　軌道は曲線 $y=x\log x$ の $e^{-1}\le x\le e$ の部分。解はこの弧を往復し、周期 2π で $(1,0)$ に戻る

解説

$c(t)$ の平均 λ が、周期性を壊すかどうかを決めている。上三角の系では x が y の方程式に外力として入り、その累積 $x_0C(t)$ が一周期で $2\pi\lambda x_0$ ずつ増える。x の方程式の増幅率は $e^{\int_0^{2\pi}\cos t\,dt}=1$ なので、スカラーの段階では周期性が保たれるが、2 成分目では外力の平均が残ると周期性が失われる。これは問題 41 で $\mu=1$ のときに $\int e^{-A}b$ が 0 かどうかで場合が分かれたことと同じ構図で、ここでは

$e^{-A}b = e^{-\sin t}c(t)x_0e^{\sin t} = x_0c(t)$ なので条件が $x_0\int_0^{2\pi} c = 0$ になる。



(4) の軌道は閉曲線ではなく弧で、解は同じ道を行き来する。自励系なら軌道は交差も折り返しもしないが、本問は係数が t に依存する非自励系なので、速度 $(x', y') = \cos t\,(x,\ x+y)$ が $t = \pi/2$ で 0 になり、そこで向きが反転する。曲線の傾きは $dy/dx = \log x + 1$ で、速度の比 $(x+y)/x = 1 + \log x$ と一致する。$\lambda \neq 0$ にすると $y/x = \lambda t + \sin t$ が増え続け、$x = e^{\sin t}$ は区間 $[1/e,\ e]$ にとどまるので、軌道は弧から外れて上（$\lambda > 0$ なら y が増える向き）へずれていく。

「x と y の係数がともに周期的だから解も周期的」と考えて (3) の答えを「すべての初期値」とする誤りは、$\lambda = 1$、$x_0 = 1$、$y_0 = 0$ で $y(2\pi) = 2\pi \neq 0 = y(0)$ となることで反証できる。

問題 56　固有値の符号と負の時刻で有界な解

東大情報理工 2023 年度 第 2 問と同じ分野

問題

$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ の方程式 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$ を考える。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ のとき、$t \leq 0$ で有界な解と、$t \geq 0$ で有界な解をそれぞれ初期値で特徴づけよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ のとき、e^{tA} を求め、$t \leq 0$ で有界な解は $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{0}$ だけであることを示せ。

(3) (2) の A と $\boldsymbol{f}(t) = (\cos t, 0)^{\mathsf{T}}$ について、$t \leq 0$ で有界な解がただ一つ存在することを示し、それを求めよ。

解答

(1)　A の固有値は 3（固有ベクトル $(1,1)^{\mathsf{T}}$）と -1（$(1,-1)^{\mathsf{T}}$）。初期値を $\boldsymbol{x}(0) = \alpha(1,1)^{\mathsf{T}} + \beta(1,-1)^{\mathsf{T}}$ と分けると

$$\boldsymbol{x}(t) = \alpha e^{3t}(1,1)^{\mathsf{T}} + \beta e^{-t}(1,-1)^{\mathsf{T}}.$$

$t \to -\infty$ では $e^{3t} \to 0$、$e^{-t} \to \infty$ なので、有界であることと $\beta = 0$ は同値。$t \to +\infty$ では逆に $\alpha = 0$ と同値である。

答　$t \leq 0$ で有界 $\iff$ $\boldsymbol{x}(0)$ が $(1,1)^{\mathsf{T}}$ の定数倍。$t \geq 0$ で有界 $\iff$ $\boldsymbol{x}(0)$ が $(1,-1)^{\mathsf{T}}$ の定数倍

(2)　特性多項式は $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$。$N = A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq O$、$N^2 = O$ なので、$-2I$ と

(2) の $\int_0^\infty e^{-x}\cos ax\,dx$ は、部分積分を 2 回行って元の積分に戻す方法でも求まる。複素指数関数を使う場合は、$|e^{-(1-ia)x}| = e^{-x} \to 0$ だから上端の寄与が消えることを確かめる。$\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-ia} = \frac{1}{1+a^2}$ の虚部 $\frac{a}{1+a^2}$ は $\int_0^\infty e^{-x}\sin ax\,dx$ に当たる。これを F' と取り違えると $F(a) = \frac{1}{2}\log(1+a^2)$ という誤った答えになり、F が奇関数であること（sin が奇関数）と矛盾する。

(3) では、G の被積分関数が $x \to 0$ で $a^2/2$ に近づき有界であることが、収束の根拠になっている。$1-\cos ax$ を ax と同程度と見積もると $\frac{1-\cos ax}{x^2} \sim \frac{a}{x}$ となり、原点で発散すると誤判断する。正しくは $1-\cos u = 2\sin^2(u/2) \le u^2/2$ で 2 次の小ささである。数値積分で確かめると、$a=2$ で $G(2) \approx 1.40958$、式 $2\arctan 2 - \frac{1}{2}\log 5 \approx 1.40958$ が一致する。$a = 1/2$ でも 0.12025 で一致する。

(4) の展開を $\arctan a \approx \pi/2$ だけで止めると、$G(a) \approx \frac{\pi}{2}a - \log a$ となり定数項 -1 が出ない。定数項は $\arctan(1/a) = 1/a + O(1/a^3)$ に a を掛けた 1 から来る。$a = 100$ で差を数値計算すると -1.67×10^{-5} 程度で、残りは $O(1/a^2)$ で減っている。

(5) では、単調収束定理（非負の可測関数の列が各点で単調に増加して f に収束すれば、積分も $\int f$ に収束する）が交換の根拠である。優収束定理を使うなら優関数 $(1-\cos y)/y^2$ の可積分性を先に示す必要があるが、単調収束定理なら極限側の積分が $+\infty$ になる場合も含めて主張できるので、可積分性は (4) の結果から後で分かる。$\int_0^\infty (1-\cos y)/y^2\,dy$ は部分積分すると $\int_0^\infty \sin y/y\,dy$ に等しく、Dirichlet 積分の値 $\pi/2$ を、減衰因子を付けて計算してから外すという流れで得たことになる。

問題 100　模擬 2 第 3 問　一様な 2 点で切った線分の長さ

東大情報理工 2022 年度 第 3 問と同じ分野

問題

長さ 1 の線分 $[0,1]$ 上に、独立に区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う 2 点 X, Y をとり、線分を 3 つの部分に切る。部分の長さを左から

$$L_1 = \min(X,Y), \qquad L_2 = |X-Y|, \qquad L_3 = 1 - \max(X,Y)$$

とする。

(1) 3 つの部分を辺として三角形が作れる確率を求めよ。

(2) $0 \le x \le 1/3$ に対し $P(\min(L_1,L_2,L_3) > x) = (1-3x)^2$ を示し、最短の部分の長さの確率密度関数と期待値を求めよ。

(3) $P(L_1 > x)$、$P(L_1 > x,\ L_3 > x)$ を求めよ。また、$i \ne j$ のとき $P(L_i > x,\ L_j > x) = \{\max(1-2x, 0)\}^2$ が成り立つことを用いて、最長の部分の長さの期待値を求めよ。

(4) 一般に、$[0,1]$ 上に独立な一様分布の点を $n-1$ 個（$n \ge 2$）とって n 個の部分に切る。最短の部分の長さを M_n とするとき、$0 \le x \le 1/n$ で $P(M_n > x) = (1-nx)^{n-1}$ を示し、$E[M_n]$ を求めよ。

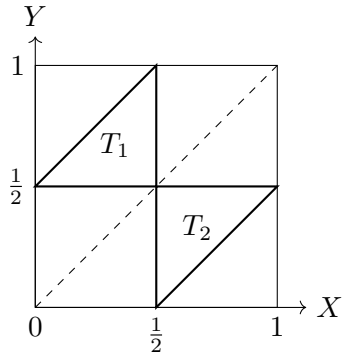


図　三角形が作れる (X,Y) の領域（$X<Y$ 側が T_1、$X>Y$ 側が T_2。破線は $X=Y$）

解答

(1)　3 つの長さの和は 1 なので、三角形が作れる条件（どの辺も他の 2 辺の和より小さい）は、どの部分も $1/2$ より短いことと同値である。$X<Y$ の側では $X<1/2$、$Y-X<1/2$、$Y>1/2$ であり、これは 3 頂点 $(0,\frac12),(\frac12,\frac12),(\frac12,1)$ の三角形 T_1（面積 $1/8$）である。$X>Y$ の側も対称に面積 $1/8$ の三角形 T_2 になる。(X,Y) は単位正方形上で一様だから

答　$\dfrac{1}{4}$

(2)　$X<Y$ の側では、$\min L_i>x$ は $X>x$、$Y-X>x$、$1-Y>x$ と同値である。$X'=X-x$、$Y'=Y-2x$ と平行移動すると、条件は $0<X'<Y'<1-3x$ となり、面積 $(1-3x)^2/2$ の直角二等辺三角形である（平行移動は面積を変えない）。$X>Y$ の側も同じ面積なので

$$P(\min L_i>x)=(1-3x)^2\qquad(0\le x\le 1/3).$$

分布関数は $1-(1-3x)^2$ だから、密度は $6(1-3x)$（$0\le x\le 1/3$、それ以外は 0）。期待値は裾の積分で

$$E[\min L_i]=\int_0^{1/3}(1-3x)^2\,dx=\frac{1}{9}.$$

答　密度 $6(1-3x)$（$0\le x\le\frac13$）、　$E[\min L_i]=\dfrac{1}{9}$

(3)　$L_1>x$ は $X>x$ かつ $Y>x$ なので、独立性から $P(L_1>x)=(1-x)^2$。$L_1>x$ かつ $L_3>x$ は X,Y がともに区間 $(x,1-x)$ に入ることで、$0\le x\le 1/2$ なら $P=(1-2x)^2$、$x>1/2$ なら 0。L_2,L_3 についても同様に $P(L_i>x)=(1-x)^2$ となる（L_2 は $|X-Y|>x$ を表す 2 つの三角形の面積の和 $(1-x)^2$、L_3 は $X,Y<1-x$）。

最長の部分を $L_{\max}$ とすると、包除原理と (2) から、$0\le x\le 1$ で

$$P(L_{\max}>x)=P\Big(\bigcup_i\{L_i>x\}\Big)=3(1-x)^2-3\{(1-2x)_+\}^2+\{(1-3x)_+\}^2,$$

ただし $s_+=\max(s,0)$。$L_{\max}\ge 0$ なので

$$E[L_{\max}]=\int_0^1 P(L_{\max}>x)\,dx=3\cdot\frac13-3\cdot\frac16+\frac19=\frac{11}{18}.$$

答　$P(L_1>x)=(1-x)^2$、$P(L_1>x,L_3>x)=\{(1-2x)_+\}^2$、　$E[L_{\max}]=\dfrac{11}{18}$

(4)　$n-1$ 個の点を小さい順に並べた $T_1<\cdots<T_{n-1}$ の同時密度は、領域 $0<t_1<\cdots<t_{n-1}<1$ 上で $(n-1)!$ である（元の点の並べ方 $(n-1)!$ 通りが同じ並び替え後の値を与える）。$T_0=0$、$T_n=1$ とすると、$M_n>x$ は $T_i-T_{i-1}>x$（$i=1,\dots,n$）と同値である。$S_i=T_i-ix$ とおくと、この条件は $0<S_1<\cdots<S_{n-1}<1-nx$ と同値で、この変換は平行移動なので体積を変えない。$1-nx$ を一辺とする同じ形の単体の体積は $(1-nx)^{n-1}/(n-1)!$ だから

$$P(M_n>x)=(n-1)!\cdot\frac{(1-nx)^{n-1}}{(n-1)!}=(1-nx)^{n-1}\qquad(0\le x\le 1/n).$$

$$E[M_n]=\int_0^{1/n}(1-nx)^{n-1}\,dx=\frac{1}{n}\int_0^1 s^{n-1}\,ds=\frac{1}{n^2}.$$

答　$E[M_n]=\dfrac{1}{n^2}$

解説

2 点の一様分布の問題は、単位正方形の中の面積に置き換えて解ける。(X,Y) が独立で各々一様なら同時密度は正方形上で 1 であり、事象の確率は対応する領域の面積に等しい。$X<Y$ と $X>Y$ で L_1,L_3 の式が入れ替わるので、片側で計算して 2 倍するときは、もう片側でも同じ形になることを確かめておく。

(1) の三角形の条件を「$L_1+L_2>L_3$ だけ」とすると、確率は $P(\max(X,Y)>1/2)=3/4$ となり誤る。三角不等式は 3 辺すべてについて必要であり、和が 1 の場合は「どの辺も $1/2$ 未満」にまとまる。これは (3) の結果とも整合し、$P(L_{\max}<1/2)=1-P(L_{\max}>1/2)=1-3\cdot\frac14=\frac14$ となる（$x=1/2$ では 2 つ以上の部分が同時に $1/2$ を超えることはない）。

(2) の平行移動による計算は、(4) の一般化と同じ考え方である。各部分から長さ x ずつ先に取り除くと、残りの長さ $1-3x$ を 2 点で切る問題になる。$P(\min>x)=1-3x$ と 1 乗にしてしまうのは、面積（2 次元）を長さのように扱った誤りで、$x=1/3$ 付近での振る舞いは正しいが、$x=0$ での密度が 3 となり (2) の 6 と合わない。期待値 $1/9$ は、3 つの部分の長さの平均 $1/3$ よりかなり小さい。最短の部分は平均の 3 分の 1 程度しかないということで、一様に切っても長さは大きくばらつく。

(3) の包除原理では、3 つの事象がすべて起こる確率 $P(L_1,L_2,L_3>x)$ を足し戻す。これを忘れて $3(1-x)^2-3(1-2x)_+^2$ とすると、$x=0$ での値が 0 になり、確率 1 であるべき $P(L_{\max}>0)$ と矛盾する。$x\le 1/3$ では 3 項の和がちょうど 1 になる。$3(1-x)^2-3(1-2x)^2+(1-3x)^2$ を展開すると x の項も x^2 の項も消えるからで、最長の部分は必ず $1/3$ 以上であることを表している。3 つの期待値の和は $E[L_{\min}]+E[L_{中}]+E[L_{\max}]=1$ なので、真ん中の長さの期待値は $1-\frac19-\frac{11}{18}=\frac{5}{18}$ である。

(4) は (2) を $n=3$ として含む。$n=3$ なら $(1-3x)^2$、$E=1/9$ で一致する。$n=2$ では $M_2=\min(X,1-X)$ で $P(M_2>x)=1-2x$、$E[M_2]=1/4$ となり、直接計算と合う。$E[M_n]=1/n^2$ は、部分の平均の長さ $1/n$ のさらに $1/n$ 倍である。モンテカルロ法で 10^6 回試すと、$n=3$ で $E[L_{\min}]\approx 0.1112$、$E[L_{\max}]\approx 0.6110$、$n=5$ で $E[M_5]\approx 0.0400$ となり、上の値と合う。