院試数学　基礎完成シリーズ

精選問題集

線形代数

要項・類題60問

院試hub

利用上の注意

本書は院試 hub が独自に作成した基礎ノートと練習問題です。大学・研究科等の公式資料ではありません。各大学の過去問の本文・原図は収録していません。出題分野の頻度は、院試 hub が解答を公開している実施回の分類に基づきます。本書の無断転載、再配布、共有を禁じます。

目次

出題分野の頻度 5

第 1 章　連立一次方程式と行列の階数 6

行基本変形と階数 6

解の存在と一般解の形 6

階数の性質と行列式 7

掃き出しの手順 8

問題 1　掃き出し法で解く連立方程式 8

問題 2　行列の階数と列空間の基底 10

問題 3　掃き出しで求める逆行列 11

問題 4　4 次の行列式 12

問題 5　パラメータを含む連立方程式の場合分け 13

問題 6　パラメータを含む行列の階数 14

問題 7　同次方程式の解空間と次元定理 16

問題 8　三重対角行列の行列式と漸化式 17

問題 9　階数の不等式と積が零になる行列 18

問題 10　$A^{\mathsf{T}}A$ の階数と最小二乗の正規方程式 19

第 2 章　固有値と対角化 21

固有値と特性多項式 21

対角化できる条件 22

出題分野の頻度

院試 hub が解答を公開している実施回を分類した問数。同じ大問が複数の分野に数えられることがある。

分野	問数	主な出題校（問数）
固有値・固有ベクトル	601	東京大学 128、東京科学大学 59、京都大学 56、東北大学 45、名古屋大学 42
線形空間・基底	167	東京大学 35、京都大学 19、東京科学大学 15、名古屋大学 12、大阪大学 10
正定値行列	78	東京大学 21、京都大学 9、東京科学大学 9、大阪大学 7、東北大学 6
二次形式	72	東京大学 18、大阪大学 9、名古屋大学 7、東京科学大学 6、東北大学 5
直交対角化	26	大阪大学 3、筑波大学 3、東京大学 3、九州大学 2、東京科学大学 2
ジョルダン標準形	25	東北大学 4、岡山大学 4、東京都立大学 3、東京科学大学 2、金沢大学 2

答　(1) $(1,-1,1,0)^{\mathsf T}, (0,-1,0,1)^{\mathsf T}$。(2) 上の P。(3) 距離 $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$。

解説

$W^{\perp}$ は「$A^{\mathsf T}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間」すなわち $\operatorname{Ker} A^{\mathsf T}$ である。一般に $(\operatorname{Im} A)^{\perp}=\operatorname{Ker} A^{\mathsf T}$ で、これは第 1 章の次元定理と合わせて $\dim W+\dim W^{\perp}=4$ を与える。$W^{\perp}$ が 2 次元なので、射影を $I-P_{W^{\perp}}$ として求めても手間は変わらない。

距離は $\boldsymbol{v}-P\boldsymbol{v}$ の長さで、これが $W^{\perp}$ に入っていることを確かめる。$\frac{1}{5}(2,-6,2,4)=\frac{2}{5}(1,-1,1,0)+\frac{4}{5}(0,-1,0,1)$ と (1) の基底で表せるので、確かに直交補空間の元である。さらに $\boldsymbol{a}_1^{\mathsf T}(\boldsymbol{v}-P\boldsymbol{v})=\frac{1}{5}(2-6+0+4)=0$、$\boldsymbol{a}_2^{\mathsf T}(\boldsymbol{v}-P\boldsymbol{v})=\frac{1}{5}(-6+2+4)=0$。

P のトレースは $\frac{3+2+3+2}{5}=2=\dim W$ で、問題 29 の「射影ではトレース＝階数」と合う。P の第 2 行と第 4 行が等しいのは、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ のどちらでも第 2 成分と第 4 成分が等しく、W のすべての元がこの性質をもつからである。A の列が直交していないので、$P=AA^{\mathsf T}$ としてはいけない。$AA^{\mathsf T}$ の $(1,1)$ 成分は 1 だが、$(AA^{\mathsf T})^2$ の $(1,1)$ 成分は 3 で、$P^2=P$ を満たさない。

問題 36　最小二乗法による直線の当てはめ

北大 地球惑星科学 2026・東大 学際情報 2012 と同じ分野

問題

4 点 $(x_i,y_i)=(0,1),(1,2),(2,2),(3,4)$ に直線 $y=a+bx$ を当てはめる。残差の二乗和 $S(a,b)=\sum_{i=1}^{4}(y_i-a-bx_i)^2$ を最小にする a,b と、そのときの S の値を求めよ。

解答

$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とおくと $S=\|\boldsymbol{y}-A\boldsymbol{c}\|^2$。$A$ の 2 列は一次独立なので $A^{\mathsf T}A$ は正則で、最小点は正規方程式 $A^{\mathsf T}A\boldsymbol{c}=A^{\mathsf T}\boldsymbol{y}$ のただ 1 つの解である。

$$A^{\mathsf T}A=\begin{pmatrix}4&\sum x_i\\ \sum x_i&\sum x_i^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\6&14\end{pmatrix},\qquad A^{\mathsf T}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\sum y_i\\ \sum x_iy_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\18\end{pmatrix}.$$

行列式は $56-36=20$ で、

$$a=\frac{14\cdot 9-6\cdot 18}{20}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10},\qquad b=\frac{4\cdot 18-6\cdot 9}{20}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}.$$

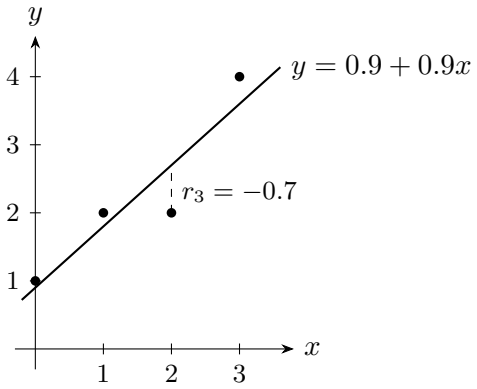
残差 $r_i=y_i-a-bx_i$ は $0.1,\ 0.2,\ -0.7,\ 0.4$ で、

$$S=0.01+0.04+0.49+0.16=0.7.$$

答　$a=b=\dfrac{9}{10}$（直線 $y=0.9+0.9x$）、$S_{\min}=\dfrac{7}{10}$

解説

最小二乗の直線は、データベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$ を A の列空間（「定数」と「x に比例」の 2 方向が張る平面）に正射影したものである。正規方程式は残差 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} - A\boldsymbol{c}$ が両方の列と直交するという条件 $\sum r_i = 0,\ \sum x_i r_i = 0$ で、上の残差では $0.1 + 0.2 - 0.7 + 0.4 = 0$、$0 + 0.2 - 1.4 + 1.2 = 0$ と確かに成り立つ。1 つ目の条件から、最小二乗の直線は必ずデータの重心 $(\bar{x}, \bar{y}) = (1.5,\ 2.25)$ を通る $(0.9 + 0.9 \cdot 1.5 = 2.25)$。



縦方向の残差（y のずれ）を最小にしていることを忘れ、点と直線の距離（垂線の長さ）の二乗和を最小にすると考える誤りがある。それは主成分分析（全最小二乗）の問題で、答えが変わる。また、A の第 1 列（すべて 1）を入れ忘れると、原点を通る直線 $y = bx$ への当てはめになり、$b = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$ という別の値が出る。

b は統計の式 $b = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$ でも求められる。$x_i - \bar{x} = -1.5, -0.5, 0.5, 1.5$、$y_i - \bar{y} = -1.25, -0.25, -0.25, 1.75$ から分子 $1.875 + 0.125 - 0.125 + 2.625 = 4.5$、分母 5 で $b = 0.9$ となり、一致する。

問題 37　QR 分解と連立方程式

東大 学際情報 2013・阪大情報 数学 2024 と同じ分野

問題

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を、直交行列 Q と対角成分が正の上三角行列 R の積 $A = QR$ に分解せよ。また、この分解を使って $A\boldsymbol{x} = (9, 0, 9)^{\mathsf{T}}$ を解け。

解答

列を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ としてグラム・シュミットを行う。$\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ より $\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^{\mathsf{T}}$, $r_{11} = 3$。

$r_{12} = \boldsymbol{q}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{3}(3 + 6 + 0) = 3$。$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{q}_1 = (3, 3, 0) - (1, 2, 2) = (2, 1, -2)$、$\|\boldsymbol{b}_2\| = 3$ で $r_{22} = 3$, $\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^{\mathsf{T}}$。

$r_{13} = \boldsymbol{q}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{3}(6 + 6 + 6) = 6$、$r_{23} = \boldsymbol{q}_2^{\mathsf{T}} \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{3}(12 + 3 - 6) = 3$。

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - 6\boldsymbol{q}_1 - 3\boldsymbol{q}_2 = (6, 3, 3) - (2, 4, 4) - (2, 1, -2) = (2, -2, 1),$$

問題 46　二次曲線の主軸と形

東大 学際情報 2018・阪大 情報基礎数学 2023 と同じ分野

問題

曲線 $C : 5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$ の主軸の方向を求め、C が楕円であることを示して長半径と短半径を求めよ。また C の概形を図示せよ。

解答

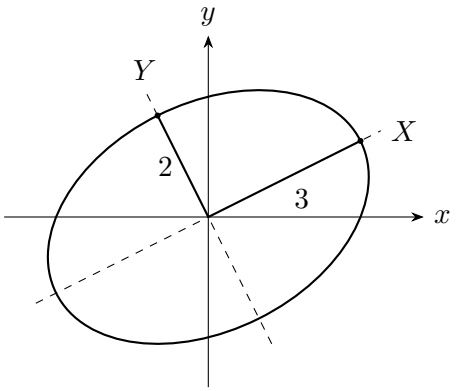
$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ とおくと C は $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} A \boldsymbol{x} = 36$。特性多項式は $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$ で、固有値は $4, 9$。$A - 4I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ から固有ベクトル $(2,1)^{\mathsf{T}}$、$A - 9I = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ から $(-1,2)^{\mathsf{T}}$。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と回転すると $4X^2 + 9Y^2 = 36$、すなわち

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

固有値がともに正なので楕円である。X 軸（方向 $(2,1)$）が長軸で長半径 3、Y 軸（方向 $(-1,2)$）が短軸で短半径 2。X 軸は x 軸から $\tan\theta = \frac{1}{2}$ の角だけ回った直線 $y = \frac{x}{2}$ である。



答　主軸は $y = \frac{x}{2}$ 方向（長軸、長半径 3）と $y = -2x$ 方向（短軸、短半径 2）。C は楕円 $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$。

解説

主軸の方向が固有ベクトルの方向になり、半径は $\sqrt{c/\lambda}$ になる。固有値の小さいほうが長軸に対応することに気をつけたい。$\lambda = 4$ の方向では $4X^2 = 36$ で $X = \pm 3$、$\lambda = 9$ の方向では $Y = \pm 2$ となる。大きい固有値の方向ほど q が急に増えるので、同じ値 36 に早く達して半径が小さくなる。

長軸の端点は元の式を満たす。$X = 3, Y = 0$ は $(x, y) = \frac{3}{\sqrt{5}}(2,1)$ で、

$$5 \cdot \frac{36}{5} - 4 \cdot \frac{18}{5} + 8 \cdot \frac{9}{5} = \frac{180 - 72 + 72}{5} = 36.$$

短軸の端点 $\frac{2}{\sqrt{5}}(-1,2)$ でも $5 \cdot \frac{4}{5} - 4 \cdot \frac{-8}{5} + 8 \cdot \frac{16}{5} = \frac{20+32+128}{5} = 36$ となる。楕円の面積は $\pi \cdot 3 \cdot 2 = 6\pi$ で、一般に $\pi c / \sqrt{\det A} = 36\pi/6$ と一致する。

$-4xy$ を行列に入れるときに $(1,2)$ 成分を -4 にすると、固有値が $\frac{13 \pm \sqrt{9+64}}{2}$ となって整数にならず、

方向もずれる。もう 1 つの誤りは、長半径を固有値の大きいほうの方向に取ることで、図を描くと端点が曲線上にないことがわかる。

問題 47　平方完成による符号数

東大 複雑理工 2026・名大 複雑系科学 2025 と同じ分野

問題

二次形式 $q = 2xy + 2yz + 2zx$ について、(1) 対称行列 A の固有値を求め、符号数を答えよ。(2) 固有値を使わずに、変数変換と平方完成で q を平方の和と差に直し、(1) の符号数と一致することを確かめよ。

解答

(1)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I$ で、J の固有値 $3, 0, 0$ から A の固有値は $2, -1, -1$。正が 1 個、負が 2 個で、符号数は $(1, 2)$。

(2)　x^2 の項がないので、まず $x = u+v,\ y = u-v$ とおく。$2xy = 2u^2 - 2v^2$、$2yz + 2zx = 2z(x+y) = 4uz$ だから

$$q = 2u^2 + 4uz - 2v^2 = 2(u+z)^2 - 2z^2 - 2v^2.$$

$s = u + z,\ t = v,\ w = z$ とおけば $q = 2s^2 - 2t^2 - 2w^2$。$(x, y, z) \mapsto (s, t, w)$ は正則な一次変換（$u = \frac{x+y}{2},\ v = \frac{x-y}{2}$ なので $s = \frac{x+y}{2} + z,\ t = \frac{x-y}{2},\ w = z$）であり、正の項 1 個、負の項 2 個で、符号数は $(1, 2)$。

答　(1) 固有値 $2, -1, -1$、符号数 $(1, 2)$。(2) $q = 2\left(\frac{x+y}{2} + z\right)^2 - 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 - 2z^2$。

解説

シルベスターの慣性法則により、正則な変数変換で対角形にしたときの正・負の項の個数は変換によらない。(2) で得た係数 $2, -2, -2$ は固有値 $2, -1, -1$ と一致しないが、符号の並びは一致している。直交変換でない合同変換では、係数の大きさは変わり、符号だけが保たれる。展開すると元の式に戻る。$2\left(\frac{x+y}{2} + z\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + 2(x+y)z + 2z^2$、$-2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = -\frac{(x-y)^2}{2}$ で、和は $\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{2} + 2(x+y)z = 2xy + 2yz + 2zx$。$-2z^2$ が $2z^2$ と打ち消し合う。

二乗の項がない二次形式は、そのままでは平方完成の出発点がない。$xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$ に当たる $x = u + v,\ y = u - v$ の置き換えで二乗の項を作るのが定石である。$q = (x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ と書いて「正 1 個、負 3 個」とするのは誤りで、4 つの平方は独立でない（3 変数なので独立な一次式は 3 個まで）。符号数を数えるのは、変換が正則で変数の個数と項の個数が一致しているときだけである。

q の値を見ても符号数と合う。$(1, 1, 1)$ では $q = 6 > 0$、$(1, -1, 0)$ では $q = -2 < 0$ で不定。q が正定値になる部分空間（その上の $\mathbf{0}$ 以外で $q > 0$）の次元は最大 1 で、$\mathrm{span}\{(1, 1, 1)\}$ がその例である。これが正の項が 1 個であることの意味である。