4力学・制御

精選問題集

機械系院試　基礎演習シリーズ

要項・類題150問

院試hub

利用上の注意

本書は院試 hub が独自に作成した基礎ノートと練習問題です。大学・研究科等の公式資料ではありません。各大学の過去問の本文・原図は収録していません。出題分野の頻度は、院試 hub が解答を公開している実施回の分類に基づきます。本書の無断転載、再配布、共有を禁じます。

目次

出題分野の頻度 10

第 1 章　材料力学 11

応力とひずみ 11

ねじり 12

せん断力図と曲げモーメント図 12

曲げ応力と断面二次モーメント 13

はりのたわみ 13

不静定問題と座屈 14

ひずみエネルギーとカスティリアノの定理 15

基礎問題（問題 1〜12） 15

問題 1　段付き棒の応力と伸び 15

問題 2　ポアソン比と体積の変化 17

問題 3　2 本の線で吊った剛体棒 18

問題 4　すき間のある棒の熱応力 19

問題 5　伝動軸の直径 20

問題 6　中空軸と中実軸の比較 21

問題 7　2 つの集中荷重を受ける単純支持はり 22

問題 8　等分布荷重と先端荷重を受ける片持ちはり 23

問題 9　断面の向きと曲げ応力 24

問題 10　T 形断面の図心と曲げ応力 25

出題分野の頻度

院試 hub が解答を公開している実施回を分類した問数。同じ大問が複数の分野に数えられることがある。

分野	問数	主な出題校（問数）
材料力学：応力とひずみ・引張圧縮	20	九州大学 6、東京大学 6、名古屋大学 4、東北大学 4
熱力学：熱力学第一法則・状態変化	19	九州大学 7、名古屋大学 5、東北大学 4、東京大学 3
熱力学：エントロピー・第二法則	18	九州大学 6、東京大学 6、名古屋大学 3、東北大学 3
機械力学・振動：1 自由度系の自由振動	18	名古屋大学 6、九州大学 5、東京大学 4、東北大学 3
機械力学・振動：剛体の回転運動	17	九州大学 9、東京大学 4、名古屋大学 2、東北大学 2
材料力学：はりのたわみ	16	九州大学 6、名古屋大学 4、東北大学 3、東京大学 3
材料力学：不静定はり・不静定構造	16	九州大学 9、名古屋大学 3、東北大学 3、東京大学 1
材料力学：ひずみエネルギー・カスティリアノの定理	15	九州大学 9、名古屋大学 4、東北大学 2
流体力学：運動量の法則	15	九州大学 7、東京大学 4、名古屋大学 3、東北大学 1
材料力学：はりの曲げ応力・断面二次モーメント	13	名古屋大学 5、東京大学 5、東北大学 2、九州大学 1
熱力学：熱伝導	12	東京大学 6、九州大学 4、名古屋大学 2
制御工学：安定判別（ラウス・フルビッツ）	12	東北大学 5、東京大学 4、名古屋大学 3
流体力学：ベルヌーイの定理	11	九州大学 5、名古屋大学 3、東北大学 3
機械力学・振動：2 自由度系と固有モード	11	名古屋大学 5、九州大学 3、東北大学 2、東京大学 1
制御工学：伝達関数とブロック線図	11	名古屋大学 5、東北大学 3、東京大学 3
制御工学：定常偏差	11	名古屋大学 4、東京大学 4、東北大学 3
機械力学・振動：強制振動と共振	9	九州大学 4、名古屋大学 2、東京大学 2、東北大学 1
制御工学：状態方程式・状態フィードバック	9	名古屋大学 5、東北大学 3、東京大学 1
材料力学：ねじり	8	九州大学 4、東北大学 2、東京大学 2
流体力学：静水圧・浮力	8	九州大学 6、東京大学 2
熱力学：蒸気・冷凍・ヒートポンプサイクル	8	九州大学 3、東京大学 3、東北大学 2
機械力学・振動：ラグランジュの方程式	8	名古屋大学 3、九州大学 2、東北大学 2、東京大学 1
制御工学：過渡応答（ステップ応答）	8	東京大学 4、東北大学 3、名古屋大学 1
熱力学：対流熱伝達・フィン	7	九州大学 5、名古屋大学 1、東京大学 1
制御工学：ボード線図・周波数応答	7	名古屋大学 4、東京大学 3
制御工学：PID 制御	7	東京大学 3、名古屋大学 2、東北大学 2
材料力学：組合せ応力・応力変換	6	東京大学 5、東北大学 1
材料力学：トラス	6	九州大学 3、名古屋大学 2、東京大学 1
流体力学：管路損失	6	九州大学 5、東北大学 1
流体力学：渦・ポテンシャル流れ	6	東北大学 3、東京大学 2、名古屋大学 1
機械力学・振動：振り子・微小振動	6	名古屋大学 2、東京大学 2、九州大学 1、東北大学 1
熱力学：ガスサイクル	5	九州大学 2、東京大学 2、東北大学 1
熱力学：開いた系・非定常の流入	5	名古屋大学 2、東京大学 2、東北大学 1
機械力学・振動：減衰振動	5	東京大学 4、名古屋大学 1
流体力学：粘性流れ・ナビエ・ストークス方程式	4	東京大学 3、九州大学 1
流体力学：圧縮性流れ	4	名古屋大学 2、東京大学 2
熱力学：熱交換器	4	九州大学 2、名古屋大学 1、東京大学 1
流体力学：境界層	3	名古屋大学 2、東京大学 1
材料力学：熱応力	2	名古屋大学 1、東京大学 1
熱力学：カルノーサイクル	2	東北大学 1、東京大学 1
機械力学・振動：回転体・ジャイロ	2	九州大学 2
制御工学：ナイキスト線図・安定余裕	2	名古屋大学 1、東北大学 1
材料力学：座屈	1	東京大学 1
材料力学：薄肉圧力容器	1	東京大学 1
流体力学：次元解析・相似則	1	東北大学 1

確かめには、BC 部側から求めた $\varphi_B = T_C/k_2 = 0.386\times10^6/(1.590\times10^7) = 0.0243\,\mathrm{rad}$ が一致することを見ればよい。直径の比だけで $T_A : T_C = d_1^4 : d_2^4$ とし長さを忘れると、$T_A = 0.912\,\mathrm{kN\,m}$ となる。逆に長さの比で配分し $T_A/T_C = a/b$ とする答案もあるが、長い区間ほどやわらかいので比は b/a の向きに効く。

問題 15　張出しはりのせん断力図と曲げモーメント図

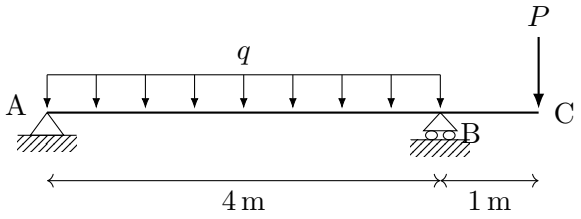
東大 機械工学 2025・名大 機械・航空宇宙 2023 と同じ分野

問題

図のはりは A（ピン、$x=0$）と B（ローラー、$x=4\,\mathrm{m}$）で支えられ、B から右へ 1 m 張り出して先端 C に至る。AB 間に等分布荷重 $q = 2\,\mathrm{kN/m}$、先端 C に集中荷重 $P = 3\,\mathrm{kN}$（いずれも下向き）がかかる。

(1) 支点反力を求めよ。

(2) せん断力図と曲げモーメント図を描き、正の最大曲げモーメント、負の最大曲げモーメント、曲げモーメントが 0 になる点（変曲点）を求めよ。



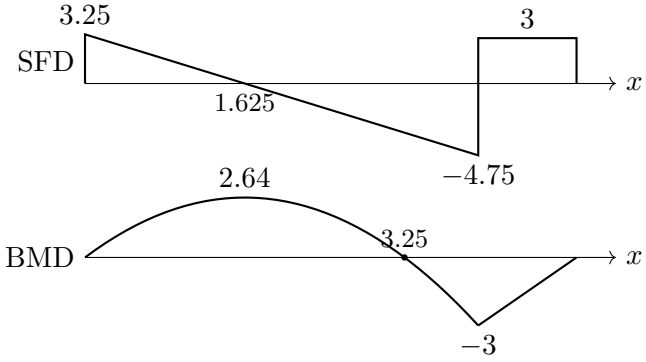
解答

(1)　A まわりのモーメントのつり合い $4R_B = (2\times4)\times2 + 3\times5 = 31$ から $R_B = 7.75\,\mathrm{kN}$。鉛直方向から $R_A = 8 + 3 - 7.75 = 3.25\,\mathrm{kN}$。

(2)　左側の自由体から（単位 kN、m）

$$
\begin{aligned}
&0 < x < 4: \quad Q = 3.25 - 2x, \quad M = 3.25x - x^2,\\
&4 < x < 5: \quad Q = 3.25 - 8 + 7.75 = 3, \quad M = 3.25x - 8(x-2) + 7.75(x-4) = 3x - 15.
\end{aligned}
$$

Q は $x = 1.625\,\mathrm{m}$ で 0 になり、そこで正の最大 $M = 3.25\times1.625 - 1.625^2 = 2.64\,\mathrm{kN\,m}$。B では $M = 13 - 16 = -3\,\mathrm{kN\,m}$ で、これが負の最大（$= -P\times1$）である。$3.25x - x^2 = 0$ から変曲点は $x = 3.25\,\mathrm{m}$。



答　$R_A = 3.25\,\mathrm{kN}$、$R_B = 7.75\,\mathrm{kN}$、$M_{\max} = 2.64\,\mathrm{kN\,m}$（$x = 1.625\,\mathrm{m}$）、$M_{\min} = -3\,\mathrm{kN\,m}$（B）、変

曲点 $x = 3.25\,\mathrm{m}$

解説

最大値の判定で、正の最大だけを答える誤りが多い。本問では $|M_{\min}| = 3 > 2.64$ で、絶対値の最大は支点 B にある。断面が上下対称なら B で応力が最大となり、設計の基準になる。R_B を求めるときに等分布荷重の合力 $8\,\mathrm{kN}$ を A に置いてしまうと、$R_B = 3.75$、$R_A = 7.25$ という誤った値が出る。

張出し部の荷重は、支点 B を中心にてこのように AB 間を持ち上げる。そのため R_A は張出しがない場合の $4\,\mathrm{kN}$ より小さく、B 付近では上側が伸びる負の曲げになる。曲げモーメントの符号が変わる変曲点ではたわみ曲線の凹凸が入れ替わるので、変形の概形を描くときの手がかりになる。

Q は B で R_B だけ跳び上がり、-4.75 から 3 になる。張出し部の $Q = 3$ が先端荷重 P に等しいことは、右側の自由体からすぐわかり、図の確かめになる。M は B で折れ、張出し部では傾き 3 の直線で C の 0 に戻る。

問題 16　長方形断面のせん断応力分布

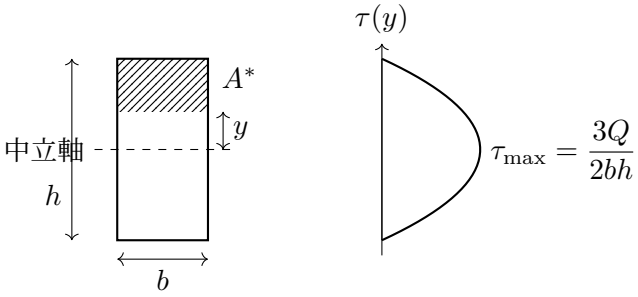
東大 機械工学 2024・東北大 機械工学 2025 と同じ分野

問題

スパン $l = 1.2\,\mathrm{m}$ の単純支持はりの中央に集中荷重 $P = 10\,\mathrm{kN}$ がかかる。断面は幅 $b = 30\,\mathrm{mm}$、高さ $h = 60\,\mathrm{mm}$ の長方形である。

(1) 中立軸から y の位置のせん断応力 $\tau(y)$ を導け。

(2) 最大曲げ応力と最大せん断応力を求め、その比を l/h で表せ。



解答

(1)　長さ dx の部分のうち、y より外側（図の網掛け部 A^*）を取り出す。両端面の曲げ応力の差による軸方向の力は $\int_{A^*}(dM\,\eta/I)\,dA = dM\,S/I$ で、$S = \int_{A^*}\eta\,dA$ は A^* の中立軸まわりの断面一次モーメントである。これが切断面 y（幅 b）のせん断力 $\tau b\,dx$ とつり合うので、$dM/dx = Q$ を使って

$$\tau = \frac{QS}{Ib}.$$

長方形では $S = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$、$I = bh^3/12$ だから

$$\tau(y) = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), \qquad \tau_{\max} = \tau(0) = \frac{3Q}{2bh}.$$

(2)　最大曲げモーメントは中央で $M = Pl/4 = 3.0\times10^6\,\mathrm{N\,mm}$、$Z = bh^2/6 = 1.8\times10^4\,\mathrm{mm^3}$ より $\sigma_{\max} = 166.7\,\mathrm{MPa}$。せん断力は全長で $|Q| = P/2 = 5\,\mathrm{kN}$ なので $\tau_{\max} = 3\times5000/(2\times1800) =$

れる。速度分布を仮定する運動量積分法でも、係数は数 % の誤差で同じ形が出る（問題 51）。

壁面せん断応力は前縁で無限大、下流に行くほど $x^{-1/2}$ で小さくなる。境界層が厚くなって速度勾配がゆるやかになるからである。このため平均摩擦係数 $C_f = 1.328/\sqrt{Re_L}$ は後縁の局所値 $c_f(L) = 0.664/\sqrt{Re_L}$ のちょうど 2 倍で、片面の抗力が $2\tau_w(L)\,bL$ に等しいという確かめになる。実際、$2 \times 0.0244 \times 0.50 \times 1.0 = 0.0244\,\mathrm{N}$ で (3) の片面の値と一致する。

摩擦抗力は $U^{3/2}$ と $L^{1/2}$ に比例する。流速を 2 倍にすると抗力は 2.83 倍、板を 2 倍に長くしても 1.41 倍にしかならない。下流側ほど境界層が厚く、単位面積あたりの摩擦が小さいためである。

境界層の厚さを全長のレイノルズ数で一律に $\delta = 5.0x/\sqrt{Re_L}$ とすると、(4) で $x = 0.245\,\mathrm{m}$（$\delta \propto x$ と扱った結果）となって、正しい値の 2 倍になる。また、抗力を局所の c_f で計算して $D_1 = c_f(L) \cdot \frac{1}{2}\rho U^2 bL = 0.0122\,\mathrm{N}$ とすると、半分の値になる。名大の問題のように速度分布を仮定して求める場合も、局所値と平均値の区別は同じである。

問題 43　縮小しながら曲がる管に働く力

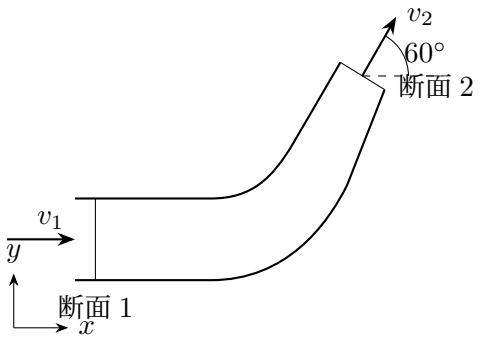
九大機械 2023（急拡大ダクトの運動量収支）・東大機械 2022（運動量法則と細管内の粘性流れ）と同じ分野

問題

水平面内に置かれた曲がり管で、水が入口断面 1（内径 $D_1 = 0.20\,\mathrm{m}$）から x 方向に流入し、出口断面 2（内径 $D_2 = 0.15\,\mathrm{m}$）から x 軸と 60° をなす向きに流出する。流量は $Q = 0.10\,\mathrm{m^3/s}$、断面 1 のゲージ圧は $p_1 = 150\,\mathrm{kPa}$ である。損失と重力の影響は無視し、断面内の速度は一様とする。水の密度は $1000\,\mathrm{kg/m^3}$。

(1) 断面 1・2 の流速と、断面 2 のゲージ圧 p_2 を求めよ。

(2) 水が曲がり管に及ぼす力の x, y 成分と大きさを求めよ。



解答

(1)　$A_1 = \pi(0.20)^2/4 = 3.142 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^2}$、$A_2 = \pi(0.15)^2/4 = 1.767 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^2}$ なので

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = 3.18\,\mathrm{m/s}, \qquad v_2 = \frac{Q}{A_2} = 5.66\,\mathrm{m/s}.$$

損失がなく水平なので、断面 1 と 2 の間でベルヌーイの定理から

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = 150 \times 10^3 + 500 \times (10.13 - 32.02) = 1.391 \times 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

(2)　曲がり管の内部の水を検査体積とし、管が水に及ぼす力を (R_x, R_y) とする。断面の圧力は検査体積を内向きに押すので、断面 1 では $+x$ 向きに $p_1 A_1 = 4712\,\mathrm{N}$、断面 2 では出口の向きと逆に $p_2 A_2 = 2457\,\mathrm{N}$ が働く。質量流量は $\rho Q = 100\,\mathrm{kg/s}$。運動量の定理の各成分は

$$x:\ p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos 60^\circ + R_x = \rho Q(v_2 \cos 60^\circ - v_1),$$

$$y:\ -p_2 A_2 \sin 60^\circ + R_y = \rho Q\, v_2 \sin 60^\circ .$$

数値を入れると

$$R_x = 100 \times (2.829 - 3.183) - 4712 + 2457 \times 0.5 = -35.4 - 4712 + 1229 = -3519\,\mathrm{N},$$

$$R_y = 100 \times 4.901 + 2457 \times 0.866 = 490 + 2128 = 2618\,\mathrm{N}.$$

水が管に及ぼす力はその反作用で

$$F_x = 3.52 \times 10^3\,\mathrm{N}, \qquad F_y = -2.62 \times 10^3\,\mathrm{N}, \qquad |\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 4.39 \times 10^3\,\mathrm{N}.$$

力の向きは x 軸から時計回りに 36.6° である。

答　(1) $v_1 \approx 3.18\,\mathrm{m/s}$、$v_2 \approx 5.66\,\mathrm{m/s}$、$p_2 \approx 139\,\mathrm{kPa}$　　(2) $F_x \approx 3.52\,\mathrm{kN}$、$F_y \approx -2.62\,\mathrm{kN}$、$|\boldsymbol{F}| \approx 4.39\,\mathrm{kN}$

解説

曲がり管の問題では、連続の式で速度、ベルヌーイの定理（または損失を含むエネルギー式）で出口の圧力、運動量の定理で力、という順に三つの保存則を使い分ける。運動量の定理だけでは p_2 が未知のまま残るので、エネルギーの式が必要になる。損失があるときは p_2 を損失水頭の分だけ小さくし、運動量の式はそのまま使う。

力の内訳を見ると、圧力による項（4712、1229、2128 N）が運動量の変化（35、490 N）よりはるかに大きい。内圧の高い配管では、曲がり部の固定金具が受ける力の大部分は圧力によるものである。圧力の項を落とすと $F_x = 35\,\mathrm{N}$、$F_y = -490\,\mathrm{N}$ となり、力を一桁以上小さく見積もる。

ゲージ圧を使ってよいのは、管の外側にも大気圧が一様に働くからである。絶対圧で計算すると、管の外面に働く大気圧の合力も検査体積の外力として数えなければならず、両方を合わせるとゲージ圧で計算したのと同じになる。

符号の確かめとして、$p_1 = p_2 = 0$、$v_1 = v_2 = v$ の場合を考えると、$R_x = \rho Q v(\cos 60^\circ - 1) < 0$、$R_y = \rho Q v \sin 60^\circ > 0$ で、管は流れを $+y$ 側へ曲げるために水を左上へ押し、水は管を右下へ押す。この向きは本問の答えと同じである。

断面 2 の圧力の力を出口の向き（$+60^\circ$）に取ると、R_x の $p_2 A_2$ の項と R_y の圧力項の符号が逆になり、$F_x = 5.98$、$F_y = +1.64\,\mathrm{kN}$、$|\boldsymbol{F}| = 6.2\,\mathrm{kN}$ と、大きさだけでなく y 成分の向きまで逆になる。圧力は面を押す力なので、検査体積から見てつねに内向きである。