院試数学　基礎完成
シリーズ

微分積分

精選問題集

要項・類題60問

院試hub

利用上の注意

本書は院試 hub が独自に作成した基礎ノートと練習問題です。大学・研究科等の公式資料ではありません。各大学の過去問の本文・原図は収録していません。出題分野の頻度は、院試 hub が解答を公開している実施回の分類に基づきます。本書の無断転載、再配布、共有を禁じます。

目次

出題分野の頻度 5

第 1 章　極限・級数・一様収束 6

数列の極限と実数の連続性 6

級数の収束判定 6

各点収束と一様収束 7

級数の和を求める方法 7

問題 1　漸化式で定まる数列の極限 8

問題 2　正項級数と交代級数の収束判定 9

問題 3　べき級数の収束半径と端点 10

問題 4　各点収束と一様収束の区別 11

問題 5　M 判定法と項別微分・項別積分 13

問題 6　項ごとに一様収束しても和が一様収束しない例 14

問題 7　無限区間での積分と極限の交換 15

問題 8　項別積分による $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}dx$ 16

問題 9　パラメータを含む関数列の一様収束と積分 17

問題 10　関数項級数の一様収束と項別微分・項別積分 18

第 2 章　偏微分・テイラー展開・極値 20

偏微分可能性・全微分可能性・連続性 20

テイラーの定理 21

出題分野の頻度

院試 hub が解答を公開している実施回を分類した問数。同じ大問が複数の分野に数えられることがある。

分野	問数	主な出題校（問数）
重積分と極座標	163	電気通信大学 19、京都大学 17、大阪大学 14、東北大学 13、東京科学大学 12
留数定理	135	京都大学 20、東京大学 18、大阪大学 17、東京科学大学 15、北海道大学 6
フーリエ変換	98	東京大学 27、京都大学 19、東京科学大学 8、北海道大学 8、東北大学 7
一様収束	68	東京大学 23、東京科学大学 9、大阪公立大学 5、東京都立大学 5、名古屋大学 4
ラプラス変換	63	東北大学 13、東京大学 13、北海道大学 7、東京科学大学 6、電気通信大学 5
テイラー展開	56	東北大学 11、東京大学 9、北海道大学 6、京都大学 4、大阪大学 4
ラグランジュの未定乗数法	38	京都大学 12、大阪大学 5、横浜国立大学 4、東京大学 3、静岡大学 2
フーリエ級数	38	九州大学 6、京都大学 4、東北大学 4、大阪大学 4、名古屋工業大学 4
ベータ関数・ガンマ関数	24	京都大学 6、大阪大学 4、東北大学 2、東京科学大学 2、東京大学 2
偏微分可能性と連続性	12	東京大学 3、東北大学 2、九州大学 1、名古屋大学 1、東京科学大学 1
微分方程式の級数解法	8	東京大学 4、東京科学大学 2、名古屋大学 1、総合研究大学 1

解説

一般化極座標は、楕円を単位円に引き伸ばす線形変換 $x=aX$、$y=bY$（ヤコビアン ab）と、単位円の極座標（ヤコビアン r）の合成である。合成写像のヤコビアンは積 abr になる。ヤコビアンを r のままにすると答えが $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4}$ となるが、$\iint (x^2+y^2)dx\,dy$ は長さの 4 乗の次元を持つので、長さの 2 乗の式は次元からして誤りとわかる。$a=b$ では $\iint(x^2+y^2)=2\pi\int_0^a r^3 dr=\frac{\pi a^4}{2}$ で、公式と一致する。

(2) は直交軸の定理 $I_z=I_x+I_y$ と結びつく。$I_x=\sigma\iint y^2=\frac{Mb^2}{4}$、$I_y=\sigma\iint x^2=\frac{Ma^2}{4}$ で、和が (1) の結果になる。円板では $\frac{1}{2}Ma^2$ が再現される。

(3) は (1) の 3 次元版で、z を z/c に縮める線形変換と単位球の球座標の合成になっている。$\iiint_E z^2 dV$ を体積で割ると $\frac{c^2}{5}$ で、楕円体の中で一様に分布する点の z 座標の分散に当たる。一般に n 次元の単位球の中で一様に分布する点では、$|\boldsymbol{x}|^2$ の平均が $\frac{\int_0^1 \rho^{n+1}d\rho}{\int_0^1 \rho^{n-1}d\rho}=\frac{n}{n+2}$ で、対称性から各座標の 2 乗の平均はその $\frac{1}{n}$、すなわち $\frac{1}{n+2}$ になる。$n=2,3$ で $\frac{1}{4},\frac{1}{5}$ が出る。

問題 27　球と放物面で囲まれた立体の体積と曲面積

九大工 機械 2024・東北大 情報基礎科学 2025 と同じ分野

問題

$W=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 6,\ z\ge x^2+y^2\}$ とする。(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=6$ と放物面 $z=x^2+y^2$ の交わりを求めよ。(2) 円柱座標を用いて W の体積を求めよ。(3) z 軸に垂直な平面で切った断面積を積分する方法で (2) の結果を確かめよ。(4) W の境界のうち放物面の部分の面積を求めよ。

解答

(1)　$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと、交わりでは $z=r^2$ かつ $r^2+z^2=6$ なので $z^2+z-6=(z-2)(z+3)=0$。$z=r^2\ge 0$ より $z=2$、$r=\sqrt{2}$。交わりは平面 $z=2$ 上の円 $x^2+y^2=2$ である。

(2)　W の点では $r^2\le z\le \sqrt{6-r^2}$ で、これが空でない条件は $r^2\le\sqrt{6-r^2}$、すなわち $r^4+r^2-6\le 0$、$r\le\sqrt{2}$ である。円柱座標（ヤコビアン r）で

$$
\begin{aligned}
|W| &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \bigl(\sqrt{6-r^2}-r^2\bigr) r\,dr\,d\theta = 2\pi\Bigl[-\frac{1}{3}(6-r^2)^{3/2}-\frac{r^4}{4}\Bigr]_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2\pi\Bigl(-\frac{8}{3}-1+2\sqrt{6}\Bigr) = \frac{2\pi}{3}\bigl(6\sqrt{6}-11\bigr).
\end{aligned}
$$

(3)　高さ z での断面は、$x^2+y^2\le z$ かつ $x^2+y^2\le 6-z^2$ を満たす円板である。$0\le z\le 2$ では $z\le 6-z^2$ なので半径の 2 乗は z、$2\le z\le\sqrt{6}$ では $6-z^2$ になる。よって

$$
|W|=\pi\int_0^2 z\,dz+\pi\int_2^{\sqrt{6}}(6-z^2)\,dz = 2\pi+\pi\Bigl[6z-\frac{z^3}{3}\Bigr]_2^{\sqrt{6}} = 2\pi+\pi\Bigl(4\sqrt{6}-\frac{28}{3}\Bigr)=\pi\Bigl(4\sqrt{6}-\frac{22}{3}\Bigr)
$$

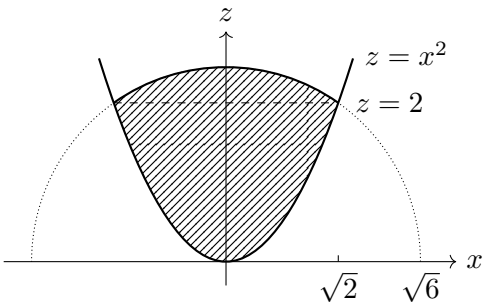
で、(2) の $\frac{2\pi}{3}(6\sqrt{6}-11)$ と一致する。

(4)　放物面の部分は $z=x^2+y^2$（$x^2+y^2\le 2$）のグラフで、$z_x=2x$、$z_y=2y$ より

$$
S=\iint_{x^2+y^2\le 2}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr = 2\pi\cdot\frac{1}{12}\Bigl[(1+4r^2)^{3/2}\Bigr]_0^{\sqrt{2}}=\frac{13\pi}{3}.
$$

答　(1) 円 $x^2+y^2=2$、$z=2$　　(2) $\dfrac{2\pi}{3}(6\sqrt{6}-11)\approx 7.743$　　(4) $\dfrac{13\pi}{3}\approx 13.61$

解説



図は $y=0$ での断面で、斜線部が W の切り口である。下の境界が放物線 $z=x^2$、上の境界が円 $x^2+z^2=6$ の弧で、両者は $z=2$ の高さで交わる。円柱座標で r の上限を決めるのは、この交点の $r=\sqrt{2}$ である。球の半径 $\sqrt{6}$ を上限にとると

$$2\pi\int_0^{\sqrt{6}}\bigl(\sqrt{6-r^2}-r^2\bigr)r\,dr=2\pi\bigl(2\sqrt{6}-9\bigr)\approx -25.8$$

という負の値が出る。$r>\sqrt{2}$ では $\sqrt{6-r^2}<r^2$ となり、「上の面マイナス下の面」が負になるからである。どちらの面が上かは r の範囲ごとに確かめる。

(3) の断面による方法では、境界の役割が高さで入れ替わる。$z<2$ では放物面が断面の縁を決め、$z>2$ では球面が決める。$0\le z\le 2$ の部分の体積 2π は、放物面の内側の「おわん」の体積で、半径 $\sqrt{2}$、高さ 2 の円柱の体積 4π のちょうど半分である。

放物面の内側の体積が外接する円柱の半分になることはアルキメデスも知っていた。$2\le z\le\sqrt{6}$ の部分は球の帽子形で、その体積 $\pi(4\sqrt{6}-\frac{28}{3})\approx 0.465\pi$ は小さい。

境界全体の面積も求めておくと、球面の部分は高さ $\sqrt{6}-2$ の帽子で、面積は $2\pi\sqrt{6}(\sqrt{6}-2)=2\pi(6-2\sqrt{6})\approx 6.92$ である（球帯の面積は高さだけで決まる）。放物面の部分 $\frac{13\pi}{3}\approx 13.61$ と合わせると、W の表面積は約 20.53 になる。(4) の被積分関数 $\sqrt{1+4r^2}$ にヤコビアンの r が掛かって $(1+4r^2)^{3/2}$ の微分の形になることは、問題 22(3) の re^{-r^2} と同じ仕組みである。

問題 28　広義重積分の収束と値

名大多元数理 2022・科学大 数理・計算科学 2024 と同じ分野

問題

(1) $\alpha>0$ とする。$\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}$ が収束するための α の条件と、そのときの値を求めよ。(2) $\beta>0$ とする。$B=\{x^2+y^2\le 1\}$ に対し $\displaystyle\iint_{B}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\beta}}$ が収束するための条件と値を求めよ。(3) 3 次元の単位球 B_3 で $\displaystyle\iiint_{B_3}\frac{dV}{(x^2+y^2+z^2)^{\gamma/2}}$（$\gamma>0$）が収束する条件と値を求めよ。

解答

いずれも被積分関数は正なので、広義積分は近似列の取り方によらず、円板（球）の列で計算してよい。

Γ_R 上では $|z^4+1| \geq R^4-1$ なので $\left|\int_{\Gamma_R} f\,dz\right| \leq \frac{R^2}{R^4-1}\cdot \pi R \to 0$。$R\to\infty$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx = 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(3)　$g(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ の上半平面の極は $z=i$（2 位）で、

$$\mathrm{Res}(g,i) = \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}.$$

大円弧上では $|g|\leq \frac{1}{(R^2-1)^2}$ で、寄与は $\frac{\pi R}{(R^2-1)^2}\to 0$。よって $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i\cdot\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}$。

答　(2) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.2214$　　(3) $\dfrac{\pi}{2}$

解説

(1) では、根 $z_\pm$ のうちどちらが単位円の内部にあるかを、積 $z_+z_-=1$ から判定した。二つの根の絶対値の積が 1 で、等しくはない（$a>1$ だから実数で異なる）ので、一方が内側、他方が外側にある。a を 1 に近づけると $z_\pm$ がともに -1 に近づき、積分は $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\to\infty$ と発散する。$a=1$ では $\theta=\pi$ で被積分関数が $\frac{1}{1+\cos\theta}\approx\frac{2}{(\theta-\pi)^2}$ となり、可積分でないことと整合する。数値では $a=\frac{5}{4}$ で $\frac{2\pi}{3/4}=\frac{8\pi}{3}\approx 8.378$ である。

(2) の大円弧の評価は、分母の次数が分子より 2 高いことを使っている。$|f|\leq\frac{R^2}{R^4-1}\approx R^{-2}$、弧の長さ πR で、積は $R^{-1}\to 0$。次数差が 1 しかなければこの評価では 0 にならず、e^{ikx} のような因子とジョルダンの補題が必要になる（問題 56）。留数を $\frac{z_k^2}{4z_k^3}$ と書いたあと $\frac{1}{4z_k}$ を $\frac{z_k}{4}$ と取り違えると、和が $\frac{z_1+z_2}{4}=\frac{i}{2\sqrt{2}}$ となり、積分が $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ という負の値になる。正の関数の積分が負になったら、留数の計算を疑う。

結果は第 4 章の方法でも確かめられる。被積分関数は偶関数なので、$2\int_0^\infty\frac{x^2}{1+x^4}dx = 2\cdot\frac{1}{4}B(\frac{3}{4},\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin(3\pi/4)}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$（問題 40 の公式で $a=2$、$b=4$、$c=1$）。

(3) の値 $\frac{\pi}{2}$ は、問題 57(3) でパーセバルの等式から得る値と同じである。実積分としても、$x=\tan t$ で $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}$ と確かめられる。2 位の極で 1 位の公式 $\lim(z-i)g(z)$ を使うと極限が発散し、g/h 型の公式 $\frac{1}{h'(i)}$ を使うと $h'(i)=4i(i^2+1)=0$ で割り算ができない。どちらも、極の位数を先に確かめていれば避けられる。

問題 56　ジョルダンの補題と振動積分

京大工 2026・阪大情報科学 情報工学 2024 と同じ分野

問題

$a>0$、$k>0$ とする。(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{a}e^{-ka}$ を示せ。(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin kx}{x^2+a^2}dx=\pi e^{-ka}$ を示せ。大円弧上の積分の評価にジョルダンの補題 $\int_0^\pi e^{-kR\sin\theta}d\theta<\frac{\pi}{kR}$ を用いよ。

解答

上半平面の大円弧 $\Gamma_R: z=Re^{i\theta}$（$0\leq\theta\leq\pi$、$R>a$）と実軸上の $[-R,R]$ からなる閉曲線 C_R を考える。上半平面で $|e^{ikz}|=e^{-k\,\mathrm{Im}\,z}\leq 1$ である。

(1)　$f(z)=\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}$ の上半平面の極は $z=ia$（1 位）で、$\mathrm{Res}(f,ia)=\frac{e^{-ka}}{2ia}$。$\Gamma_R$ 上で $|f|\leq\frac{1}{R^2-a^2}$ な

ので $\left|\int_{\Gamma_R} f\,dz\right| \le \frac{\pi R}{R^2-a^2} \to 0$。$R\to\infty$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx = 2\pi i\cdot\frac{e^{-ka}}{2ia} = \frac{\pi}{a}e^{-ka}.$$

実部をとれば (1) を得る（虚部 $\int \frac{\sin kx}{x^2+a^2}dx = 0$ は被積分関数が奇関数であることと整合する）。

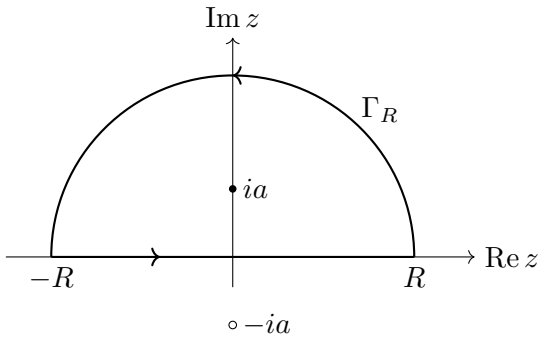
(2)　$g(z) = \frac{ze^{ikz}}{z^2+a^2}$ とすると $\mathrm{Res}(g, ia) = \frac{iae^{-ka}}{2ia} = \frac{e^{-ka}}{2}$。$\Gamma_R$ 上では $\left|\frac{z}{z^2+a^2}\right| \le \frac{R}{R^2-a^2}$ で、$|e^{ikz}| = e^{-kR\sin\theta}$ なので

$$\left|\int_{\Gamma_R} g\,dz\right| \le \frac{R}{R^2-a^2}\int_0^{\pi} e^{-kR\sin\theta}R\,d\theta < \frac{R^2}{R^2-a^2}\cdot\frac{\pi}{kR} \longrightarrow 0.$$

$R\to\infty$ として $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2}dx = 2\pi i\cdot\frac{e^{-ka}}{2} = \pi i e^{-ka}$。虚部をとって (2) を得る。

答　(1) $\dfrac{\pi}{a}e^{-ka}$　　(2) πe^{-ka}

解説



図の閉曲線の内部には極 ia だけが入り、下半平面の極 $-ia$ は入らない。上半平面を選んだのは、$k>0$ のとき e^{ikz} が上半平面で有界（むしろ減衰）だからである。$k<0$ なら下半平面を選ぶ必要があり、(1) の結果は $\frac{\pi}{a}e^{-|k|a}$ と書ける。この式は、$\frac{1}{x^2+a^2}$ のフーリエ変換がおよそ $e^{-a|\omega|}$ という指数関数になることを示しており、問題 57 の結果と逆変換の関係にある。

(1) と (2) の違いは、大円弧での減衰の速さである。(1) では被積分関数が R^{-2} で減衰するので、$|e^{ikz}|\le 1$ という粗い評価で足りた。(2) では $\frac{z}{z^2+a^2}\approx\frac{1}{z}$ で、粗い評価では $\frac{R}{R^2}\cdot\pi R\to\pi$ となって 0 にならない。ジョルダンの補題は、$e^{-kR\sin\theta}$ が $\theta=0,\pi$ の近く以外では非常に小さいことを使って、弧の長さ πR を実質 $\frac{\pi}{k}$ に縮める。

補題は $\sin\theta \ge \frac{2\theta}{\pi}$（$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$）から $\int_0^{\pi} e^{-kR\sin\theta}d\theta \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2kR\theta/\pi}d\theta < \frac{\pi}{kR}$ と示せる。$\cos kx$ をそのまま $\cos kz$ に置き換えてはいけない。$\cos kz = \frac{e^{ikz}+e^{-ikz}}{2}$ は上半平面で e^{-ikz} の部分が指数的に増大し、大円弧の積分が 0 にならない。必ず e^{ikz} に直してから実部や虚部をとる。

(2) の被積分関数は $|x|\to\infty$ でおよそ $\frac{\sin kx}{x}$ で、絶対収束はしないが、ディリクレの判定法により両端で独立に広義積分として収束する（条件収束）。条件収束なので大円弧の評価にジョルダンの補題が要った。対称な極限 $\int_{-R}^{R}$ でしか意味を持たないのは $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}dx$ のような場合で、主値は 0 だが各端で発散する。数値では、$k=2$、$a=3$ で (1) は $\frac{\pi}{3}e^{-6}\approx 0.0025957$、振動積分の数値計算とも一致する。