

第 13 問 2019 年第 1 回 III: 波动与光学

这一回的波动题分别考查图像平移、驻波计数和连续两次折射。需要把题中给出的“波腹数”“与哪个法线的夹角”落实到具体量，不能只凭熟悉的公式选择答案。

A · 问 1 经过整数周期后只比较余下相位

对应官方问题册：理科第 11 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

初始波形的波长为 $\lambda = 0.20 \text{ m}$ 。由 $f = 0.50 \text{ Hz}$ 可得 $T = 2.0 \text{ s}$ 、波速 $v = f\lambda = 0.10 \text{ m/s}$ 。

波向左传播，经过 3.5 s 向左平移 0.35 m 。去掉一个波长，等效于向左平移 0.15 m ，也等效于向右平移 0.05 m 。初始原点处向上穿过零点，因此最终原点处成为波谷，符合选项 1。

答题栏 10：选项 1。

解说

用函数核对平移方向 设振幅为 A ，初始形状可写为 $y = A \sin(2\pi x/\lambda)$ 。左行波为

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + 2\pi ft\right).$$

代入 $t = 3.5 \text{ s}$ ，时间相位为 3.5π ，得到

$$y(x, 3.5) = -A \cos \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

因此 $x = 0$ 处为波谷， $x = 0.10 \text{ m}$ 处为波峰，两点足以排除其余图像。

波形移动不代表介质水平移动 这里平移的是空间波形。介质质点仍围绕各自平衡位置上下振动，不能把 0.35 m 当作某个质点的位移。对于周期图像，先减去整数个波长能减少读图负担。

B · 问 2 开管内的波腹数与谐波序号

对应官方问题册：理科第 12 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

开管两端均为位移波腹。相邻两个波腹之间的距离为 $\lambda/2$ ，总共 n 个波腹之间有 $n - 1$ 段间隔，所以

$$\ell = (n - 1) \frac{\lambda}{2}.$$

于是

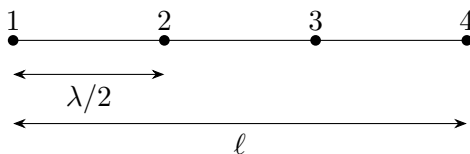
$$f = \frac{V}{\lambda} = \frac{(n - 1)V}{2\ell}.$$

答题栏 11：选项 4。

解说

先数间隔，再套共振公式 本题的 n 包含两个开口端的波腹，不是第 n 次谐波的序号。基频时只有两端两个波腹，即 $n = 2$ ，公式给出 $f = V/(2\ell)$ 。若写成 $nV/(2\ell)$ ，就把谐波序号多算了 1。

下面仅表示波腹位置的计数，圆点不表示管内介质的实际位移：



位移波腹与压强波节 开口处空气容易振动，是位移波腹；该处压强变化近似为零，是压强波节。若将这两种驻波图混用，会把边界条件反过来。题中还明确忽略开口端修正，因此直接采用几何管长 ℓ 。

C · 问 3 先求玻璃 1，再用临界角求玻璃 2

对应官方问题册：理科第 13 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

设光在玻璃 1 中与水平方向的夹角为 α 。由 5 : 12 : 13 直角三角形，

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}.$$

左侧界面的法线是水平方向。第一次折射满足

$$1 \cdot \sin 30^\circ = n_1 \sin \alpha, \quad n_1 = \frac{13}{10}.$$

上侧界面的法线是竖直方向，临界角 $\theta_c = 90^\circ - \alpha$ 。临界折射时折射角为 90° ，因此

$$n_1 \sin \theta_c = n_2, \quad n_2 = \frac{13}{10} \cdot \frac{12}{13} = 1.2.$$

答题栏 12：选项 2。

解说

两个界面的法线互相垂直 同一段玻璃内光线，在左侧界面使用 α ，在上侧界面使用 $90^\circ - \alpha$ 。如果两次都用 $\sin \alpha$ ，就会把 5/13 与 12/13 混淆。应先画出每个界面的法线，再判断入射角。

用全反射的变化方向检查 外部入射角减小时，第一次折射后的 α 也减小；上侧界面的入射角 $90^\circ - \alpha$ 反而增大，因此超过临界角而发生全反射。同时 $n_1 = 1.3 > n_2 = 1.2$ ，符合从高折射率介质射向低折射率介质的条件。

第 19 問 2020 年第 2 回 IV: 电磁学

本大题将静电平衡、等距点电势、电容器节点、电阻网络、带电粒子轨道和变化磁场放在一起。最后两问不能只算半径或电流，还要把几何边界与瞬时力的方向补全。

A · 问 1 带电小球的水平排斥与重力平衡

对应官方问题册：理科第 14 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

两球的距离为 $r = 2\ell \sin \theta$ 。对任意一个小球，竖直方向 $T \cos \theta = mg$ ，水平方向 $T \sin \theta = F_e$ ，所以 $F_e = mg \tan \theta$ 。代入库仑定律，

$$\frac{kqQ}{(2\ell \sin \theta)^2} = mg \tan \theta.$$

解得

$$Q = \frac{4mg\ell^2 \sin^3 \theta}{kq \cos \theta}.$$

答题栏 13：选项 6。

解说

电荷不同，受到的相互作用力仍相等 两球电量分别为 q 和 Q ，但相互排斥力大小相同，这是作用与反作用。又因质量与绳长相同，题中相同的偏角并不矛盾；不能认为较大电荷必定受到较大排斥力。

三次正弦来自两个不同环节 距离平方提供 $4\ell^2 \sin^2 \theta$ ，受力分解再提供 $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ 。将几何距离与力分解分开写，可以避免漏掉一个 $\sin \theta$ 。

B · 问 2 立方体中心的电势是标量和

对应官方问题册：理科第 15 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

立方体中心到每个顶点的距离均为体对角线的一半，

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

顶点共有三个 $+Q$ 与五个 $-Q$ ，电荷代数和为 $-2Q$ 。以无穷远电势为零，中心电势为

$$V_c = \sum_i \frac{kq_i}{r} = \frac{-2kQ}{\sqrt{3}a/2} = -\frac{4\sqrt{3}kQ}{3a}.$$

答题栏 14：选项 2。

解说

电势相加不需要分解方向 电势是标量，同距离时直接相加带符号的电荷。电场才需要矢量求和。中心位置对称，并不自动保证电势为零；本题正负电荷数量不同，净和为负。

半条体对角线，不是半条面对角线 从中心到顶点在三个方向上的坐标差均为 $a/2$ ，所以距离为 $\sqrt{3(a/2)^2} = \sqrt{3}a/2$ 。若误用 $a/\sqrt{2}$ ，得到的是正方形面中心到顶点的距离。

C · 问 3 电容器充电后的负节点电势

对应官方问题册：理科第 16 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

设最上方节点电势为 U ，P 为零电势，Q 点电势为 U_Q 。充电完成后无电流，电阻上的电压降为零；电源正极在上，故

$$U - U_Q = V.$$

左右两个电容器并联，合电容为 $2C$ ；中间电容器为 C 。与 P 相连的三块极板及导线起初净电荷为零，且电荷不能穿过电介质，因此

$$-2CU - CU_Q = 0, \quad U_Q = -2U.$$

联立得 $U = V/3$ 、 $U_Q = -2V/3$ 。

答题栏 15：选项 2。

解说

参考电势不是电源负极 零电势选在 P，不在电源负极 Q。Q 处可以为负电势，这与电源本身具有正的电动势 V 并不矛盾。应先保留带符号的 U, U_Q ，不要把每个电容器的电压大小都强行写成正节点电势。

用串联分压再检查一次 从电源两端看， $2C$ 与 C 通过 P 串联。串联电荷大小相同，小电容 C 承担两倍电压，因此左右并联部分电压为 $V/3$ ，中间电容器电压大小为 $2V/3$ 。中间电容器 P 侧为正，Q 侧为负，故 $U_Q = -2V/3$ 。

D · 问 4 电源串联电阻与并联负载

对应官方问题册：理科第 17 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

中间的 R 与下方的 $2R$ 连接在同一对节点之间，先合并为

$$R_p = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2R}{3}.$$

该负载与电源所在支路的 $2R$ 串联，总电阻为 $8R/3$ 。总电流 $I_s = 3V/(8R)$ ，并联负载电压为

$$U_p = I_s R_p = \frac{V}{4}.$$

因此中间电阻的电流为 $I = U_p/R = V/(4R)$ 。

答题栏 16：选项 4。

解说

上方支路不是单独的并联电阻 上方 $2R$ 与电源串联, 整个支路对负载供电。不能把三个电阻直接作三支路并联而忽略电源的位置。先找出电源以外、真正共用两个节点的 R 与 $2R$, 结构就清楚了。

用电流分配检查 下方支路电流为 $U_p/(2R) = V/(8R)$, 与中间的 $V/(4R)$ 相加, 恰好等于总电流 $3V/(8R)$ 。中间电流是总电流的 $2/3$, 不是整个回路的总电流。

E・问 5 由第一次出界位置限制第二条轨道

对应官方问题册: 理科第 18 页 (印刷页码)。请与原题对照阅读。

解答

在 O 取原点, 向右为 x 正方向, 向上为 y 正方向。第一粒子带正电, 入射速度向上、磁场向纸外, 故向右弯曲。设其半径为 r , 圆心为 $(r, 0)$, 轨道满足

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2.$$

BC 对应 $x = \ell$ 。题给出界点不在端点 B、C, 所以该处 $0 < y < \ell$, 从而

$$0 < 2r\ell - \ell^2 < \ell^2, \quad \frac{\ell}{2} < r < \ell.$$

第二粒子电荷反号, 向左弯曲; 质量加倍且速率相同, 所以半径 $\rho = 2r$ 满足 $\ell < \rho < 2\ell$ 。其轨道圆心为 $(-\rho, 0)$, 到达上边界 $y = \ell$ 时,

$$x = -\rho + \sqrt{\rho^2 - \ell^2}.$$

因为 $\rho > \ell$, 有 $-\ell < x < 0$, 故从上边界的 PD 线段出界, 对应选项 4。

答题栏 17: 选项 4。

解说

先判断是否在到达上边界前碰到左边界 沿第二条圆弧, x 从 0 向负方向连续减小; 当 $y = \ell$ 时仍有 $x > -\ell$, 所以尚未到达 DA。检验 $x > -\ell$ 可写为

$$\sqrt{\rho^2 - \ell^2} > \rho - \ell,$$

两边均非负, 平方后等价于 $\rho > \ell$, 正好是已知范围。不能只凭“半径更大、转向相反”就猜测从左边界出去。

端点排除给出严格不等式 第一粒子若恰好从 B 或 C 离开, 分别对应 $r = \ell/2$ 或 $r = \ell$ 。原题排除了这两种情形, 因此第二粒子也不需要单独处理临界端点。磁场不做功, 两次入射速率在各自圆弧中都保持不变。

F · 问 6 磁力取决于磁场与变化率的乘积

对应官方问题册：理科第 19 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

设回路面积为 S 、总电阻为 R 、AB 长度为 ℓ ，将 AB 中由 A 向 B 的向上电流取为正。该方向对应逆时针电流及正 z 方向的磁通法线。由法拉第定律，

$$I = -\frac{S}{R} \frac{dB_z}{dt}.$$

因 $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x$ ，AB 受到的水平力为

$$F_x = I\ell B_z = -\frac{S\ell}{R} B_z \frac{dB_z}{dt}.$$

每个线性区间内 dB_z/dt 为非零常数，故 F_x 随时间线性下降。初始 $B_z > 0$ 且正在增大，力先为负；磁场达到极值时变化率反号，力发生跳变；磁场过零时力也过零。符合选项 1。

答题栏 18：选项 1。

解说

只有电流呈分段常值，力不是 三角波磁场的斜率是分段常数，所以忽略自感时感应电流为分段常数。但磁力还要乘当时的 B_z ，因此不是矩形波。只判断楞次定律所得的电流图，会漏掉这一乘积。

不论磁场上升还是下降，力的斜率都为负 在线性段写 $B_z = at + b$ ，便有 $F_x = -(S\ell/R)a(at + b)$ ，其斜率是 $-(S\ell/R)a^2 < 0$ 。这比逐段记忆电流方向更稳妥。理想折点处斜率不定义，图中的跳变表示折点前后的极限；不是声称同一时刻有两个力值。