

第1問 2018年第1回 I: 二次函数与计数

本大题由二次函数与着色计数两问组成。第一问把根的位置转化为参数不等式，第二问按实际使用的颜色数分类。两问分别训练“条件取交集”与“分类不重不漏”；前者的端点是否包含、后者的对象是否可区分，是解题时应优先确认的地方。

问1 二次函数的顶点与两根的位置

对应官方问题册：数学第16页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

本题先处理“有两个不同实根”，再处理“两根都落在指定区间”。第二个条件比第一个强，不能只看判别式。

(1) 配方得到顶点 把二次项系数 $1/4$ 提出后配方：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}\{x^2 - 4(2a-1)x\} + a \\ &= \frac{1}{4}\{x - (4a-2)\}^2 - (2a-1)^2 + a \\ &= \frac{1}{4}\{x - (4a-2)\}^2 - 4a^2 + 5a - 1. \end{aligned}$$

因此顶点为 $(4a-2, -4a^2+5a-1)$ 。这里容易漏掉最后加回的 a ，把纵坐标中的 $5a$ 误写成 $4a$ 。

(2) 两个不同实根 开口向上，顶点必须严格低于 x 轴：

$$-4a^2 + 5a - 1 < 0 \iff (4a-1)(a-1) > 0.$$

所以 $a < 1/4$ 或 $a > 1$ 。等号对应重根，不符合“两点相交”。

(3) 两根都在 $[0, 6]$ 中 对于开口向上的抛物线，所需条件是：判别式为正，轴在区间内，且两端函数值非负。

$$0 \leq 4a-2 \leq 6, \quad f(0) = a \geq 0, \quad f(6) = 15-11a \geq 0.$$

轴的条件给出 $1/2 \leq a \leq 2$ ，与 (2) 相交后只能取 $a > 1$ 的一支。最后由 $f(6) \geq 0$ 得到 $a \leq 15/11$ 。

两根都在 $[0, 6]$ 中的参数范围为 $1 < a \leq \frac{15}{11}$ 。

填空核对 AB=42; CDE=451; FG=14; H=1; I=1; JKLM=1511。

解说

解题路线 本问考查的是把图像位置翻译成同时成立的不等式。配方得到轴与顶点后，不必再写出带根号的两个根。先列出“开口向上、顶点低于横轴、轴在区间内、端点不低于横轴”，再把每一条转成参数条件，最后取交集。

判别式的另一种写法 二次式的系数为 $A = 1/4$ 、 $B = -(2a-1)$ 、 $C = a$ ，故 $D = B^2 - 4AC = 4a^2 - 5a + 1$ 。而顶点纵坐标恰为 $-D$ ，所以 $D > 0$ 与顶点在横轴下方完全等价。若用两种方法得到相反的不等式，首先检查配方后的常数项。

边界与填空 先保留 $1 < a \leq 15/11$ 的完整含义，再填写分子、分母对应的格子。“两个不同实根”要求严格不等号，区间允许根落在端点却要求非严格不等号，两处的等号不能一起删去。

问2 可区分对象的着色计数

对应官方问题册：数学第18页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

四张卡片大小不同，所以它们彼此可区分。颜色名称也可区分；交换两种颜色通常会得到另一种涂法。

(1) 不限制使用颜色数 每一张卡片都有4种选择，互不限制。根据乘法原理，总数为

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4 = 256.$$

(2) 四种颜色全部使用 四张卡片使用四种颜色，必然每种恰用一次。因此是四种颜色的排列，共 $4! = 24$ 种。

(3) 指定颜色出现两次 先从四张卡片中选出涂红的两张，有 $\binom{4}{2} = 6$ 种。剩下两张分别涂黑、涂蓝，有 $2! = 2$ 种。故总数为 $6 \times 2 = 12$ 。不能再乘“选择重复颜色”的4，因为本小问重复的颜色已经指定为红色。

(4) 恰好使用三种颜色 四张卡片使用三种颜色时，出现次数只能是 $(2, 1, 1)$ 。

$$\underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{选颜色}} \underbrace{3}_{\text{选重复色}} \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{选两张卡}} \underbrace{2!}_{\text{安排其余两色}} = 144.$$

每一种最终涂法都有唯一的重复颜色，所以这个计数没有重复。

(5) 恰好使用两种颜色 先选出颜色对，有 $\binom{4}{2} = 6$ 种。固定两种颜色后， 2^4 种涂法包含了两种单色涂法，必须减去：

$$\binom{4}{2}(2^4 - 2) = 6 \times 14 = 84.$$

各小问依次为 256, 24, 12, 144, 84。

填空核对 NOP=256; QR=24; ST=12; UVW=144; XY=84。

解说

计数对象 本问考查乘法原理与分类计数。应把最终结果想成按卡片大小排好的四个颜色标签。卡片不是无区别的四个位置，颜色也有名称；因此颜色相同的次数分配相同，不代表是同一种涂法。

两种颜色的另一种分法 固定颜色后，可以按出现次数 $(3, 1)$ 与 $(2, 2)$ 分类。前者有 $2\binom{4}{1} = 8$ 种，后者有 $\binom{4}{2} = 6$ 种，共 14 种，再乘颜色对的选择数 6。这与 $6(2^4 - 2) = 84$ 一致，也说明不能把两种颜色全用上的条件漏掉。

防止重复计数 恰用三色时，重复的颜色只有一个，先选它再选位置不会重复。若改成“先选两张同色卡，再任意涂其余卡”，却不限制其余两张的颜色，就会混入只用一色、两色的涂法。每个计数因子都应对应一个明确、不可倒置的选择。

整体检算 按实际使用颜色数分成四类：只用一种有 4 种，用两种有 84 种，用三种有 144 种，用四种有 24 种。总和 $4 + 84 + 144 + 24 = 256$ ，恰好回到 (1)。

第 19 問 2021 年第 1 回 III: 指数代换与全局最小值

本题用正、负指数的对称性进行代换，把原函数转成半直线上的三次多项式。求最小值时既要比较驻点，也要保留区间端点；还原指数变量时，两条正根分支都要计算。

对应官方问题册：数学第 24 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

先把对称指数化为 t 令 $t = 2^x + 2^{-x}$ 。由于 $2^x > 0$ 且 $2^x 2^{-x} = 1$ ，算术平均与几何平均不等式给出 $t \geq 2$ ，等号在 $x = 0$ 取得。

$$4^x + 4^{-x} = t^2 - 2, \quad 8^x + 8^{-x} = t^3 - 3t.$$

原题括号中的 $4^{1+x} + 4^{1-x}$ 为 $4(t^2 - 2)$ ，而 $2^{4+x} + 2^{4-x} = 16t$ 。注意这些项位于同一括号内。整理得到

$$g(t) = t^3 - 3t - 3\{4(t^2 - 2) - 16t\} - 24 = t^3 - 12t^2 + 45t.$$

导数与端点比较

$$g'(t) = 3(t - 3)(t - 5).$$

在 $t \geq 2$ 上，函数先增、后减、再增。需要比较端点 $t = 2$ 与极小值点 $t = 5$ ，而不是只取后者：

$$g(2) = 50, \quad g(3) = 54, \quad g(5) = 50.$$

更直接的检查是

$$g(t) - 50 = (t - 2)(t - 5)^2 \geq 0 \quad (t \geq 2).$$

因此最小值为 50，恰在 $t = 2$ 或 $t = 5$ 取得。

还原所有 x $t = 2$ 对应 $x = 0$ 。对 $t = 5$ ，令 $u = 2^x > 0$ ，则 $u + 1/u = 5$ ，所以

$$u^2 - 5u + 1 = 0, \quad u = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

两根都为正，均需保留。故

$$\min f = 50, \quad x = 0, \quad \log_2(5 + \sqrt{21}) - 1, \quad \log_2(5 - \sqrt{21}) - 1.$$

填空核对 A=2; B=3; CDEF=1245; GHI=335; J=2; KL=50; M=3; NO=54; P=5; QR=50; ST=50; U=0; VWX=521; Y=1。

解说

代换范围的充分性 本问考查指数对称式与受约束的最值。对任意 $t \geq 2$ ，方程 $u^2 - tu + 1 = 0$ 都有正根，令 $x = \log_2 u$ 即能还原。因此 t 的值域确为 $[2, \infty)$ ，代换后求得的最小值不会超出原问题的范围。

为什么需要端点与局部最小点 $t = 3$ 是局部最大点， $t = 5$ 是局部最小点，但端点 2 也要比较。分解式 $g(t) - 50 = (t - 2)(t - 5)^2$ 同时给出非负性及等号条件，确认最小值在 $t = 2, 5$ 两处取得。

指数方程的两根都要保留 $t = 5$ 对应的两根均为正且互为倒数。小于 1 的根对应负的 x ，不能舍去；再加上 $t = 2$ 对应的 $x = 0$ ，共有三个最小值点。