第 7 题　2018 年第 2 回 III：互素因子与整数方程

前半部分把质因数分解用于约数个数和互素的因子配对；后半部分用选出的因子建立整数方程。互素条件要求同一种质因数的全部幂次放在同一边，这是从普通因子配对中进一步筛选的关键。

对应官方问题册：数学第 10 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

（1）质因数分解与约数个数　依次提取 2 与 5 的因子，得到

$$1400 = 14 \times 100 = 2^3 \times 5^2 \times 7.$$

其正约数可以且只能写成 $2^i 5^j 7^k$，其中 $0 \le i \le 3$、$0 \le j \le 2$、$0 \le k \le 1$。三个指数分别有 4、3、2 种选择，故正约数共有 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 个。题目计算整数约数，每个正约数还对应一个负约数，所以共有 $2 \times 24 = 48$ 个。

（2）互素的因子配对　若 a, b 互素且 $ab = 1400$，就不能把同一个质因数拆给两者。因此应把 $2^3 = 8$、$5^2 = 25$、7 看成三个不可拆分的整体，分别分配给 a 或 b。

共有 $2^3 = 8$ 种分配; 排除 $a = 1$ 或 $b = 1$ 的两种, 再按 $a < b$ 消除交换次序的重复, 共有 $(8-2)/2 = 3$ 组:

$$(a, b) = (7, 200), \quad (8, 175), \quad (25, 56).$$

对应的 $b - a$ 分别为 193、167、31，所以差最大的一组为 $a = 7, b = 200$。

（3）求正整数解中最小的 x　把上一问所得的数代入整数方程，再解出 y：

$$200x - 7y = 1, \qquad y = \frac{200x - 1}{7} = 28x + \frac{4x - 1}{7}.$$

y 为整数要求 $4x - 1$ 被 7 整除。由于 $4 \times 2 = 8 \equiv 1 \pmod 7$，

$$x \equiv 2 \pmod 7.$$

因此 $x = 2 + 7k$，代回得 $y = 57 + 200k$，其中 k 为整数。要求 x, y 均为正数时，$k \ge 0$，故最小的 x 为 2，此时 $y = 57$。

答　满足条件的 3 组为 $(7, 200), (8, 175), (25, 56)$；差最大时 $(a, b) = (7, 200)$。整数方程的正整数解为 $x = 2 + 7k$，$y = 57 + 200k$ $(k \ge 0)$，故最小 $x = 2$，此时 $y = 57$。

填空核对：ABCDE=23527；FG=48；H=3；I=7；JKL=200；MNOPQ=28417；R=2；ST=57。

解说

为什么把质因数幂次视为一个整体　本题考查质因数分解与互素条件。把 2^3 拆给两者会使它们都有因子 2；因此分配的是 $8, 25, 7$ 三个整体，而不是各个质因子。还要区分两处计数：全部整数约数包含正负两种，因子配对却明确要求 $a, b > 1$。

先列配对，再比较差　列出三组合法配对，便可直接比较差值。不能选择差更大的 $(1, 1400)$，因为它不满足 $a > 1$；也不能把 $(7, 200)$ 与 $(200, 7)$ 都计入，因为已要求 $a < b$。

整数性与正数性要分两步　同余条件只保证整数性，最后仍须限制 $k \ge 0$。不使用同余符号时，也可直接检查 $4x - 1$：$x = 1$ 不符合，$x = 2$ 符合。回代有 $200 \cdot 2 - 7 \cdot 57 = 400 - 399 = 1$。

第 19 题　2021 年第 1 回 III：倒序数字与进制转换

同一个整数在 5 进制与 9 进制中都为三位数，而且数字顺序相反。先约束每一位允许的数字，再按位权把两种表示都改写成十进制数，即可把进制问题转化为有界整数方程。

对应官方问题册：数学第 10 页（印刷页码）。请与原题对照阅读。

解答

（1）同时检查两种进制的首位　用 $(abc)_5$ 与 $(cba)_9$ 表示同一个数。5 进制的数字只能是 $0,1,2,3,4$，其中首位 a 不能为 0；反向表示中 c 也在首位，不能为 0。因此

$$1 \le a \le 4, \qquad 0 \le b \le 4, \qquad 1 \le c \le 4.$$

（2）利用位权建立整数方程　分别展开两种进制表示：

$$N = 25a + 5b + c = 81c + 9b + a.$$

移项整理，得 $24a - 4b - 80c = 0$，即

$$b = 6a - 20c.$$

因为 $b \ge 0$，所以 $20c \le 6a \le 24$。结合 $c \ge 1$，只能有 $c = 1$。于是 $b = 6a - 20$；再用 $0 \le b \le 4$，得 $20 \le 6a \le 24$，故 $a = 4, b = 4$。

（3）输出十进制与 4 进制表示　代回有 $N = 25 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 1 = 121$。用 4 的幂分解：

$$121 = 1 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1.$$

所以十进制表示为 121，4 进制表示为 $(1321)_4$。

答　$(a,b,c) = (4,4,1)$，$N = 121 = (1321)_4$。

填空核对: AB=14; CD=04; EF=14; GHI=255; JKL=819; MNO=620; PQR=441; STU=121; VWXY=1321。

解说

尾位也可能被另一种表示约束　本题考查位值制与整数条件。在 5 进制中，末位 c 本可以为 0，但它又是 9 进制的首位，所以必须非零。同一个字母参与两种表示时，要取两边约束的交集；不能只看到 9 进制就允许 c 取到 8，因为它同时还是 5 进制的一位。

三位数不是三个数字的乘积　$(abc)_5$ 表示 $25a + 5b + c$，不是 abc 相乘，也不是十进制的 $100a + 10b + c$。把位权明确写出之后，两种表示相等就是普通代数方程，进制符号不再参与计算。

正反两个方向检算　所得数字给出 $(441)_5 = 100 + 20 + 1 = 121$ 与 $(144)_9 = 81 + 36 + 4 = 121$，确实倒序且都为三位数。4 进制的四位数字均小于 4，而 $64 + 48 + 8 + 1 = 121$。这同时检查了原条件、数字取值和最终转换。